

510.07

F085

11441.11



3 9253 00126116 5

Date Due

Demco 293-5			

ŒUVRES
DE FERMAT.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



A. Dooly, Sculp.

Adelphi, London

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel
ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè,
vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas,
aut Physicam pertinentibus scriptæ.



TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta
Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

ŒUVRES DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCI

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER VOLUME (1).

	Page
AVERTISSEMENT	IX

PREMIERE PARTIE.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES.

Lieux plans d'Apollonius.

Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti. Liber primus.	V	70
Liber secundus.	V	79

Contacts sphériques.

De contactibus sphaericis.	V	112
------------------------------------	---	-----

Fragments géométriques.

Solutio problematis a Domino Pascal propositi	P	70
Porismata duo.	P	74
Porismatum Euclideanorum renovata doctrina et sub forma Isagoges recentioribus Geometris exhibita.	V	76
Propositio D. de Fermat circa parabolam.	V	84
Loci ad tres lineas demonstratio.	M	87

Lieux plans et solides.

Ad locos planos et solidos Isagoge.	V	91
Appendix ad Isagogen topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos.	V	103

(1) Les lettres majuscules placées devant les renvois indiquent que la pièce est tirée : V des *Varia Opera*, D du Diophrante de 1670, C des *Lettres de Descartes*, P des *Œuvres de Pascal*, F du traité de Lalouvière sur la Cycloïde, M de sources manuscrites.

	Pages
<i>Licet in superficie.</i>	
Isagoge ad locos ad superficiem, clarissimo Domino de Carcavi.....	M 111
<i>Dissertation tripartie.</i>	
De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et uni- cuique problematum generi proprie convenientes, dissertatio tripartita....	V 118
<i>Maxima et minima.</i>	
I. Methodus ad disquirendam maximam et minimam.....	V 133
De tangentibus linearum curvarum.....	V 134
II. Centrum gravitatis parabolici conoidis, ex eadem methodo.....	V 136
III. Ad eandem methodum : <i>Folo meâ methodo etc.</i>	V 140
IV. Methodus de maxima et minima.....	M 147
V. Ad methodum de maxima et minima appendix.....	M 153
VI. Ad eandem methodum : <i>Doctrinam tangentium etc.</i>	V 158
VII. Problema missum ad Reverendum Patrem Mersennum 10 ^a die Novem- bris 1642.....	M 167
VIII. Analysis ad refractiones.....	C 170
IX. Synthesis ad refractiones.....	C 173
<i>Méthode d'élimination.</i>	
Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in Analyticis usus.....	V 181
Appendix ad superiorem methodum.....	V 184
<i>Problème d'Adrien Romain.</i>	
Ad Adriani Romani problema, Viro clarissimo Christiano Huggenio P. F. S. T.	M 189
<i>Questions de Cavalieri.</i>	
Ad Bon. Cavalierii quaestiones responsa.....	M 195
<i>Propositions à Lalouvière.</i>	
Ad Laloveram propositiones.....	L 199
<i>Dissertation M. P. E. A. S.</i>	
De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, dissertatio geometrica.	V 211
Appendix ad dissertationem de linearum curvarum cum lineis rectis compara- tione.....	V 238
<i>Méthodes de quadrature.</i>	
De aequationum localium transmutatione et emendatione, ad multimodam cur- vilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annexitur pro- portionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus...	V 255
De cissoïde fragmentum.....	M 285

DEUXIÈME PARTIE.

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

		D	Pages
<i>Observationes Domini Petri de Fermat</i>		D	
I.	Ad definitionem VI Cl. Gasparis Bacheti Porismatum Libr. III....	"	291
II.	Ad quæstionem VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Lib. II.	"	"
III.	Ad quæstion. X Lib. II.....	"	"
IV.	Ad quæstion. X Libr. III.....	"	292
V.	Ad quæstion. XI Libr. III.....	"	"
VI.	Ad quæstion. XVII Libr. III.....	"	"
VII.	Ad commentarium in quæstion. XXII Lib. III.....	"	293
VIII.	Ad commentarium in quæstion. II Libr. IV.....	"	297
IX.	Ad eundem commentarium.....	"	298
X.	Ad commentarium in quæstion. XI Libr. IV.....	"	300
XI.	Ad quæstion. XII Libr. IV.....	"	"
XII.	Ad commentarium in eadem quæstionem.....	"	301
XIII.	Ad quæstion. XVII Libr. IV.....	"	"
XIV.	Ad quæstion. XVIII Libr. IV.....	"	302
XV.	Ad quæstion. XX Libr. IV.....	"	"
XVI.	Ad quæstion. XXI Libr. IV.....	"	303
XVII.	Ad quæstion. XXIII Libr. IV.....	"	304
XVIII.	Ad commentarium in quæstion. XXXI Libr. IV.....	"	305
XIX.	Ad quæstion. XXXV Libr. IV.....	"	306
XX.	Ad commentarium in quæstion. XLIV Libr. IV.....	"	"
XXI.	Ad commentarium in quæstion. XLV Libr. IV.....	"	307
XXII.	Ad quæstion. III Libr. V.....	"	308
XXIII.	Ad quæstion. VIII Libr. V.....	"	309
XXIV.	Ad quæstion. IX Lib. V.....	"	310
XXV.	Ad commentarium in quæstion. XII Libr. V.....	"	"
XXVI.	Ad eundem commentarium.....	"	311
XXVII.	Ad commentarium in quæstion. XIV Libr. V.....	"	314
XXVIII.	Ad quæstion. XIX Libr. V.....	"	315
XXIX.	Ad quæstion. XXIV Libr. V.....	"	318
XXX.	Ad quæstion. XXV Libr. V.....	"	321
XXXI.	Ad quæstion. XXX Libr. V.....	"	326
XXXII.	Ad quæstion. XXXI Libr. V.....	"	327
XXXIII.	Ad quæstion. XXXII Libr. V.....	"	"
XXXIV.	Ad commentarium in quæstion. III Libr. VI.....	"	"
XXXV.	Ad quæstion. VI Libr. VI.....	"	329
XXXVI.	Ad quæstion. VII Libr. VI.....	"	330
XXXVII.	Ad quæstiones VIII et IX Libr. VI.....	"	331
XXXVIII.	Ad quæstiones X et XI Libr. VI.....	"	"
XXXIX.	Ad quæstion. XIII Libr. VI.....	"	332
XL.	Ad quæstion. XIV Libr. VI.....	"	333
XLI.	Ad quæstiones XV et XVII Libr. VI.....	"	"

	Pages
XIII. Ad question. XIX Libr. VI.....	D 333
XIII. Ad commentarium in question. XXIV Libr. VI.....	" 334
XIV. Ad eundem commentarium.....	" 336
Appendix.....	" 338
XIV. Ad problema XX commentarii in ultimam questionem Arithmeti- corum Diophanti.....	" 340
XIV. Ad commentarium in proposition. IX Diophanti De multangulis numeris.....	" 341
XIV. Ad proposition. XXXII Bacheti Appendicis de numeris polygonis Libr. II.....	" 342
XIV. Ad proposition. XXXI Bacheti Appendicis Libr. II.....	" 342

APPENDICE.

I. Dédicace du Diophante de 1670.....	D 345
II. Préface du Diophante de 1670.....	D 347
III. Dédicace des Varia Opera.....	V 350
Pièces de vers latins annexées à la dédicace :	
1 ^{re} <i>Aurea Picro etc.</i>	V 352
2 ^{de} <i>Dam Padern fontes etc.</i>	V 353
3 ^{re} <i>Ole. Vane corda mulcens etc.</i>	V 354
IV. Préface des Varia Opera.....	V 355
V. Eloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Tolose. Du Journal des Sçavans, du Lundy 9 février 1665.....	DV 359
VI. Observation de Monsieur de Fermat sur Syneſius.....	DV 362
VII. Lettre de P. Fermat à M. de Ranchin. — Observations sur Polyen. . .	DV 366
VIII. Lettre de Samuel Fermat à Pellisson.....	DV 373
IX. Lettre de P. Fermat à Boulliau (24 novembre 1655). — Observations sur Frontin..... (Camusat)	380
X. Lettre de Huet aux Fermat. — Caen, 3 décembre 1659.....	M 386
XI. Lettre de P. Fermat à Huet. — Toulouse, 27 décembre 1659.....	M 388
XII. « Cede Deo, seu Christus moriens », poésie de P. Fermat dédiée à Balzac.....	V 390
XIII. Notes critiques de P. Fermat sur les Harmoniques de Manuel Bryenne.	M 394
Variantes et notes critiques.....	413
Errata.....	436
Table de concordance entre l'édition des Œuvres de Fermat de 1679 et la présente édition.....	437
PLANCHES : Portrait de Fermat et fac-similé du titre des <i>Varia opera</i> .	IV-V
Fac-similé de l'écriture de Fermat.....	XIX

AVERTISSEMENT.

I.

Bibliographie des travaux de Fermat avant les publications de son fils.

Lorsque, le 12 janvier 1665, dans le cinquième mois de sa soixante-quatrième année, Pierre de Fermat mourut à Castres, où l'avait appelé son service de conseiller au parlement de Toulouse, il était tenu pour le plus grand géomètre de l'Europe ⁽¹⁾, mais ce n'était guère par la voie de l'imprimerie que son nom s'était répandu dans le monde savant.

Lui-même n'avait d'ailleurs fait imprimer qu'une seule dissertation géométrique, et encore avait-il gardé l'anonyme ⁽²⁾; cet opuscule parut en 1660, comme annexe d'un volume publié à Toulouse, sur la cycloïde, par le Père jésuite Lalouvière. Ce dernier faisait en même temps connaître, comme étant dues à Fermat (mais publiées sans son aveu), diverses propositions intéressantes sur lesquelles l'attention n'a jamais, que nous sachions, été appelée depuis lors ⁽³⁾.

Dans l'éloge que Lalouvière fait à cette occasion de son illustre concitoyen, il rappelle ⁽⁴⁾ diverses mentions de ses travaux insérées par Mersenne dans les *Cogitata physico-mathematica* de 1644, et il cite l'une de ces mentions énumérant un certain nombre de traités manuscrits envoyés par Fermat à ses amis de Paris ⁽⁵⁾. Des autres, l'une (*præfat. ad Mechanica*, n° 4), sans désigner expressément Fermat, reproduisait la plus grande partie

(1) Lettre de Pascal à Fermat, du 10 août 1660 (n° 108 de la Correspondance de Fermat, dont la publication suivra celle du présent volume).

(2) Voir ci-après page 211, note 1, et page 199, note 1.

(3) Voir ci-après pages 199 suiv.

(4) Voir ci-après page 200, note.

(5) Ce texte de Mersenne (lequel fait partie d'un *Magni Galilæi et nostrorum Geometricarum Elogium utile*) est exactement le suivant :

« Taceo varios illos $\pi\pi\phi$ $\epsilon\pi\pi\phi$, de maximis et minimis, de tangentibus, de locis planis, solidis, et ad sphaeram percruditos, quos clarissimus Senator Tholosanus D. Fermatius huc

d'une lettre transmise à Cavalieri par l'intermédiaire de Mersenne ⁽¹⁾; la seconde (*in Ballisticis*, p. 57) donnait des détails, tirés de lettres aujourd'hui perdues, sur les travaux de Fermat relatifs aux spirales ⁽²⁾; la troisième enfin (*in Analysis*, page 385) précédait les énoncés des propositions des *Lieux plans d'Apollonius*, d'après la restitution du géomètre de Toulouse ⁽³⁾.

Dans ses Ouvrages antérieurs (depuis 1636) ou postérieurs, Mersenne a encore fait d'autres emprunts à la Correspondance de Fermat; mais alors le plus souvent il emploie des périphrases qui ne permettent pas toujours de distinguer sûrement ce qui appartient aux divers géomètres avec lesquels il était en relation. On ne pourra donc que rapprocher, des diverses lettres de Fermat, certains extraits des œuvres de Mersenne concernant les mêmes sujets ⁽⁴⁾.

ad nos misit. » (F. Marini Mersenni Minimi Cogitata physico-mathematica. In quibus tam naturæ quàm artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur. Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, viâ Jacobæ. M.DC.XLIV. Cum privilegio Regis. — première pagination, p. 193.)

(1) Voir ci-après, page 195, note 1.

(2) Voir, dans le second volume, l'appendice au n° 3 de la Correspondance.

(3) *Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ synopsis et binæ refractionum demonstrationum tractatus. Studio et Operâ F. M. Mersenni M. Parisiis, apud Antonium Bertier, viâ Jacobæ, sub signo Fortunæ. M.DC.XLIV. Cum privilegio Regis.*

En analysant la collection de Pappus, Mersenne avait déjà (p. 383) donné les énoncés du Traité des *Contacts sphériques* de Fermat (*ci-après*, pages 52 suiv.) :

« Sexdecim Problematibus tractatum hunc (de tactionibus) Vieta comprehendit in Apollonio Gallo, sed cum in planis substiterit, illum ad Sphærica Problemata Clarissimus Fermatius 15 Problematibus extendit, quæ Vietais subiungemus. »

Page 385, parlant des Porismes d'Euclide, Mersenne dit :

Huius autem tractatus Restitutio Clarissimi Domini Fermatij postulat opem, qui 2 sequentes de locis planis libros adeo fortiter redintegravit. »

Les énoncés des *Lieux plans* d'Apollonius (*voir* ci-après, pages 3 suiv.) suivent sur les pages 386 à 388. Mersenne ajoute enfin :

« Omitto locos ad superficiem cuius Isagogem vir idem Cl. amicis communem fecit, et alia quæ utinam ab eo tandem impetremus. »

(4) En dehors des citations qui précèdent, Mersenne a nommé Fermat :

1° Page 9 de la première préface de *L'Harmonie universelle contenant la théorie et la pratique de la musique* (*voir* n° 4 de la Correspondance de Fermat).

2° Dans la *Seconde partie de L'Harmonie universelle*, Paris, 1637, livre VIII, p. 61 (*voir* n° 2 de la Correspondance).

3° Page 215 des *Novarum observationum physicomathematicarum F. Marini Mersenni Minimi* (Tomus III. Quibus accessit Aristarchus Samius de mundi systemate. Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, viâ Jacobæ sub signo Fortunæ. M.DC.XLVII. Cum privilegio Regis), dans le récit d'un voyage au midi de la France.

« Cum autem vivos potius quàm mortuos ^(a) quærerem, unus abfuit Clarissimus Ferma-

(a) Mersenne parlait auparavant de toubereux qu'il avait vus à Toulouse.

La plus ancienne mention imprimée d'un opuscule manuscrit de Fermat n'est, au reste, point due à Mersenne; elle concerne la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (ci-après, pages 133-136), et doit être cherchée dans le *Brouillon projet d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture*, imprimé à Paris en août 1640.

« Puisqu'un reste de page et l'occasion y convient, afin qu'après ce Brouil-
 » lon il n'y ait plus en cecy d'abusez que ceux qui le voudront bien estre, on
 » ne doit pas croire à tout esprit, n'y à toute apparence; à tout esprit, en
 » croyant que tous ceux qui font en particulier une grande monstre de plu-
 » sieurs belles pensées en soient toujours les auteurs, on void escrite à la
 » main une belle maniere de trouver les touchantes aux courbes, ensuite des
 » plus grands et plus petits, laquelle est avérée estre de monsieur de Fermat,
 » très digne conseiller de parlement de Tholoze, et la premiere découverte
 » de la ligne qu'engendre un point en la diametrale d'un cercle roulant sur
 » une droiete est de monsieur de Roberval, très digne professeur royal aux
 » mathématiques ⁽¹⁾. A toute apparence, etc. » (*Œuvres de Desargues* réunies et analysées par M. Poudra, Paris, Leiber, 1864, tom. I, pages 354-355.)

Cette même méthode de Fermat, sur laquelle l'attention avait d'ailleurs été appelée par le bruit d'une polémique à ce sujet entre lui et Descartes, fut exposée sous son nom par P. Hérigone en 1642 (voir ci-après, page 171, note 1), lequel mentionna également ses traités manuscrits des *Lieux plans d'Apollonius* et de l'*Introduction aux lieux plans et solides*.

En 1646, la réputation du conseiller au parlement de Toulouse est assez établie pour qu'un étranger, Fr. van Schooten, le cite entre Descartes et Roberval au premier rang des géomètres ⁽²⁾.

tius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque senatore, Domino d'Espagnet, velut avulsum Bergeraco, triduo amplexus sum ⁽³⁾. Vin seire quo loco? Ubi S. Emilio Brito denatus est anno 767. Ubi coemeterium templo satis amplo ex unico lapide constructo incumbit; ubi latomus quisque excisos a prædicti Domini lapidicina, quovis die, 10 lapides parallelogrammos excindit, et quadrat, quorum latitudo 1, longitudo 2 pedum: cûmque centum lapides quadravit, 7 libras recipit. »

(1) L'accusation d'indélicatesse que formule ici Desargues à mots couverts paraît dirigée contre Beaugrand, lequel l'avait attaqué dans une lettre imprimée du 20 juillet 1640 (*Œuvres de Desargues*, t. II, p. 378).

(2) Francisci à Schooten Leydensis, de Organica Conicarum Sectionum in plano Des-

(3) Ce passage a été reproduit jusqu'à ce dernier mot parmi les mentions honorifiques de Fermat inscrites par son fils en tête des *Diophante* de 1670 et des *Varia* de 1679.

On verra ci-après (page 77, note 2) en quels termes élogieux Boulliau parlait de Fermat dans ses *Exercitationes geometricæ* de 1657, à l'occasion de son opuscule manuscrit sur les Porismes d'Euclide.

La même année, les rééditeurs des *Deipnosophistes d'Athénée*, Jean-Antoine Hugnetan et Marc-Antoine Ravaut à Lyon, inséraient, sous les initiales P. F. S. T., une remarque critique ⁽¹⁾ qui prouvait que la sagacité du célèbre géomètre s'exerçait également avec fruit dans le domaine de l'érudition.

Mais ce fut l'année suivante que, pour la première fois, des lettres de Fermat parurent sous son nom :

1^o D'abord une série importante dans le *Commercium epistolicum de Questionibus quibusdam Mathematicis nuper habitum inter Nobilissimos Viros : D. Gulielmum Vice comitem BROUCCER, Anglum; D. Kenelmum DIGBY, item Equitem Anglum; D. FERMATUM, in suprema Tholosatum Curia Judicem Præmarium; D. FRENICLUM, Nobilem Parisinum; una cum D. Joh. WALLIS Geomet. Prof. Oxoniæ; D. Franc. a SCHOOTEN, Math. Prof. Lugduni Batavorum; Illustre*, (Edidit JOHANNES WALLIS, S. Th. D. in celeberrima Oxoniensi Academia Geometriæ Professor Savilianus. — Oxonii, Excudebat A. Lichfield. Acad. Typograph., Impensis Tho. Robinson. — M.DC.LVIII) — nos 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 91, 96 de la Correspondance.

2^o Une longue lettre adressée à Gassend dans le tome VI *Petri Gassendi Opera omnia in VI Tomos divisa*, (Lugduni, sumptibus Laurentii Anisson et Joan. Bapt. Devenet, M.DC.LVIII) — n^o 62 de la Correspondance.

En 1658 encore, dans l'*Histoire de la Roulette* (anonyme) ⁽²⁾ et en janvier 1659, dans les *Lettres de A. Dettonville, contenant quelques-unes de ses inventions de Géométrie* ⁽³⁾, le nom de Fermat apparaît avec quelques indica-

criptione, Tractatus Geometris, Opticis, præsertim verò Gnomonicis et Mechanicis utilis. Qui subnexa est Appendix de Cubicarum Equationum resolutione. Lugd. Batav. Ex officinâ Elzeviriorum A^o 1656. (Reproduit comme Livre IV des *Exercitationes Mathematicæ* de 1657 : préface, page 302.)

« Aliarum autem linearum curvarum superioris generis descriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit nostri instituti, cum maluerimus meritò eximiis Viris, D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholosano, et D. Robervallo, Mathematicum in Academia Parisiensi Regio Professori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes et centra invenère, quibus Geometriam mirifice ditare valeant, et (meo judicio) vix lucem visura sunt, nisi Philomathematicorum precibus et persuasionibus ab iis in Reip. Literariæ bonum extorqueantur. »

⁽¹⁾ Voir ci-après, page 378, note 1.

⁽²⁾ *Œuvres de Pascal*, t. V, p. 165 et 179. — Voir au n^o 29 de la Correspondance de Fermat, et ci-après, page 202, note 1.

⁽³⁾ *Œuvres de Pascal*, t. V, p. 228, dans la lettre de Carcavi à Dettonville : « On a

tions sur ses travaux, de même que dans le *Traité des ordres numériques*, trouvé en 1662 imprimé dans les papiers de Pascal, sans qu'il eût encore été publié ⁽¹⁾.

En 1664 enfin, Saporta insérait, dans sa traduction du *Traité de la mesure des eaux courantes de Castelli*, une Observation de Fermat sur un passage de Synesius ⁽²⁾.

Telles furent, du vivant de Fermat, les rares publications auxquelles donnèrent lieu ses écrits et les mentions imprimées que nous avons pu trouver de ses travaux. Après sa mort et avant les volumes édités par son fils, nous n'avons à signaler que l'*Éloge de Monsieur de Fermat* ⁽³⁾, inséré dans le *Journal des Savants* du 9 février 1665, et dû au moins à l'inspiration, sinon à la plume de Carcavi, et, en 1667, la publication par Clerselier du dernier volume des *Lettres de M^r Descartes*, lequel contient une importante correspondance entre Fermat, Mersenne et Descartes d'une part, Fermat, Clerselier, Rohaut et La Chambre de l'autre ⁽⁴⁾.

« bien envoyé celle des problèmes que vous aviez déclarés être les plus faciles, savoir :
 « le centre de gravité de la ligne courbe et la dimension des surfaces des solides, laquelle
 « M. Wren nous envoya dans ses lettres du 12 octobre et M. de Fermat aussi dans les
 « siennes, où il donne une méthode fort belle et générale pour les dimensions des surfaces
 « rondes. » — Ce travail de Fermat est perdu.

⁽¹⁾ *Œuvres de Pascal*, t. V, pages 65-67. — Voir au n° 42 de la Correspondance de Fermat.

⁽²⁾ Voir ci-après, pages 362 suiv. et n° 118 de la Correspondance de Fermat (pour la dédicace de Saporta).

⁽³⁾ Voir ci-après pages 359 suiv.

⁽⁴⁾ Nos de la Correspondance de Fermat 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 34, 67, 86, 90, 93, 94, 95, 97, 99, 112, 113, 114, 115. Voir également ci-après les deux pièces p. 170 et 173. — Les *Lettres de M. Descartes* peuvent également donner lieu à nombre d'extraits intéressant Fermat, quoique tirés de lettres qui ne lui étaient pas destinées.

II.

Le Diophante de Samuel Fermat (1670).

En 1670, Samuel Fermat fit paraître, à ses frais et sans privilège, une édition in-folio de Diophante sous le titre :

DIOPHANTI | ALEXANDRINI | ARITHMETICORVM | LIBRI SEX,
ET DE NYMERIS MVLTANGVLIS | LIBER VNVS.

CUM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.

et observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrina Analytica inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis ^v(¹).

Tolosæ. Excudebat BERNARDUS BOSCH, à Regione Collegij Societatis Iesu.

M. DC. LXX.

Dans cette édition, le feuillet du titre est suivi de cinq autres non paginés qui contiennent :

Pages 1 à 3, une dédicace à Colbert (*voir* ci-après *Appendice*, p. 345 suiv.);

Pages 4 et 5, une préface *Lectori Beneuolo* (*App.*, p. 347 suiv.);

Pages 6 à 7, l'ÉLOGE DE MONSIEUR DE FERMAT, *Conseiller au Parlement de Toulouse, Du Journal des Sçavans, du Lundi 9 Février 1665* (*App.*, p. 359 suiv.);

Page 7 (ligne 22) et page 8, OBSERVATION DE MONSIEUR DE FERMAT *sur Syncensus, rapportée à la fin de la traduction du liure de la mesure des eaux courantes, de Benedetto Castelli* (*App.*, p. 362 suiv.);

Page 9, deux extraits de Lettres de Descartes à Fermat, tirées de l'édition de Clerselier :

LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES A MONSIEUR DE FERMAT, pag. 347, tom. 3 des Lettres de Monsieur Descartes.

AUTRE LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES A MONSIEUR DE FERMAT, pag. 348, tom. 3 des Lettres de monsieur Descartes.

Voir ces lettres dans le second volume de cette édition, sous les nos 32 et 34 de la Correspondance de Fermat.)

^v Au-dessous une vignette signée *Babault fecit* et représentant Orphée, avec l'inscription : OBLOQUITVR NYMERIS SEPTVM DISCRIMINA VOCVM.

Page 10, trois extraits sous les titres :

P. HÉRIGONE, tom. 6. *Cursus Mathematici*, p. 68. *De Maximis et Minimis* (voir ci-après, p. 171, note 1).

D. ISMAEL BYLLIALDVS Exercitatione de Porismatibus (voir ci-après, p. 77, note 2).

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM Reflectionum Physicomathematicarum, pag. 215 (voir plus haut, page xi, note α).

Après ces feuillets non numérotés, viennent trois paginations différentes :

La première contient d'abord, de 1 à 36, un Traité intitulé :

DOCTRINE ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM, *Collectum à R. P. Jacobo de Billy, S. I. Sacerdote, ex varijs Epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus.*

Une traduction de ce Traité sera publiée dans un volume de *Complément* à la présente édition.

Suit, pages 37 à 64, d'après l'édition de Diophante donnée par Bachet en 1621, le Traité :

CLAYDII GASPARIS BACHETI SEBYSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM LIBER PRIMVS (p. 37). LIBER SECUNDVS (p. 44). LIBER TERTIVS (p. 53).

La seconde pagination (1 à 341) reproduit l'édition de Bachet, texte grec, traduction latine et commentaires, pour les six livres des *Arithmétiques de Diophante*.

La troisième reproduit de même (pages 1 à 18) l'édition de Bachet pour le livre *Des nombres polygones de Diophante* et (pages 19 à 42) pour le Traité :

CLAYDII GASPARIS BACHETI SEBYSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS LIBER PRIMVS (p. 19). LIBER SECYNDVS (p. 29).

Au bas de la page 42 se trouve l'annotation suivante :

« Ne vacarent paginae sequentes, placuit has Epistolas adjicere varijs referentibus D. P. de FERMAT in quosdam Græcos authores observationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent disciplinas. »

Suivent les deux lettres :

P. 43 à 45 : VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN P. FERMAT S. P. D. (ci-après *Appendice*, p. 366 suiv.).

P. 46 à 48 : VIRO D. DE PELLISSON S. FERMAT S. P. D. (*App.*, p. 373 suiv.).

Comme reproduction de l'édition de Bachet, celle de Samuel Fermat est passablement fautive; l'intérêt qu'elle offre provient donc essentiellement des annotations que Pierre Fermat avait inscrites sur les marges d'un exemplaire aujourd'hui perdu du *Diophante* de Bachet, annotations que son fils a reproduites à leur place, en caractères italiques et chacune sous le titre : *OBSERVATIO H. P. F.*, la seconde seule sous celui : *OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.*

Ce sont ces *Observations sur Diophante* qui constituent la seconde Partie du présent volume. On leur a naturellement adjoint, sous des caractères différents, les textes auxquels elles se rapportent spécialement.

III.

L'édition des *Varia Opera* (1679)

Neuf ans plus tard, Samuel Fermat publiait des Œuvres de son père l'édition que nous désignons sous le nom de *Varia*, et dont le frontispice, ainsi que le portrait de Fermat placé en regard, se trouve reproduit en tête du présent Volume.

Cette édition a été réimprimée en 1861, par héliotypie, avec l'addition au bas de la page de titre :

Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedlaender et Filius.

BEROLINI, MDCCCLXI.

mais sans le portrait de Fermat.

La Table de concordance qui termine ce Volume donne le détail des pièces contenues dans l'édition de 1679, avec les renvois à la présente, qui pourra la remplacer absolument.

Samuel Fermat s'abstint volontairement de reproduire les lettres de son père déjà publiées par Clerselier dans la Correspondance de Descartes. Il y renvoie d'ailleurs par une note de la page 156 :

« Ceux qui ont le troisième Tome des Lettres de M. Descartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Descartes et divers écrits sur ce sujet depuis la page 167. jusques à la page 356. »

Il reproduisit, au contraire, la plupart des lettres à Digby que Wallis avait déjà fait connaître; on ne conçoit donc guère pourquoi il a omis deux de ces lettres et une troisième à Frenicle.

Quant aux pièces inédites qu'il publiait, il ne semble avoir eu, comme originaux, qu'un nombre relativement restreint de lettres adressées à Fermat. Pour le reste, il n'a certainement possédé, en thèse générale, que des copies plus ou moins fantives, et qu'il n'obtint d'ailleurs qu'à grand'peine.

Il est difficile de croire que Carcavi, après ce qu'il avait fait insérer dans l'Éloge de Fermat du *Journal des Savants*, ait refusé à son fils les copies des pièces qu'il possédait, au moins de celles qui étaient détaillées dans l'Éloge précité. Il n'en est pas moins certain que, s'il n'opposa pas un refus absolu, il ne donna pas copie de tous les opuscules qu'il avait entre les mains, et qu'il ne voulut rien communiquer des nombreuses lettres que Fermat lui avait personnellement adressées.

Parmi les correspondants de Fermat qui vivaient encore, lorsque son fils s'occupa de réunir ses écrits, Roberval seul paraît avoir directement répondu aux demandes de communication. Mais il choisit avec soin, pour sa plus grande gloire personnelle, ce qu'il envoyait, et, loin de fournir des copies fidèles, refondit complètement, par exemple, la lettre du 16 août 1636, autrefois écrite en son nom et en celui d'Étienne Pascal ⁽¹⁾.

La plus grande partie des autres lettres publiées par S. Fermat semble provenir de copies réunies par l'érudit Thoinard qui, d'après la correspondance de Samuel et de son ami Justel, montra un louable et rare empressement.

IV.

Les autographes de Fermat.

Après la publication des *Varia*, les collectionneurs qui conservaient des pièces inédites de Fermat purent, comme Jacques Ozanam ou Anzout, en user pour leur compte particulier; mais, à part deux exceptions, rien de nouveau ne fut imprimé jusqu'en 1839.

En 1734, Camusat publia dans le Tome premier de l'*Histoire critique des Journaux par M. C****, à Amsterdam, chez J.-F. Bernard, une lettre latine de Fermat à Ismaël Bouillau (ci-après, *Appendice*, p. 380 et suiv.).

Lors de la préparation de l'édition des *Œuvres de Blaise Pascal*, 1779,

(1) N° 8 de la Correspondance. — Un trait curieux de l'histoire des papiers de Roberval est que, parmi les écrits de lui qui ont été insérés dans les anciens *Mémoires de l'Académie des Sciences*, figure sous son nom, tome VI (pages 241 à 246 de l'édition de 1730), l'*Appendix ad Isagogen Topican* de Fermat, déjà publiée dans les *Varia* (ci-après, p. 103 suiv.).

Bossut retrouva, dans les papiers conservés par la famille de l'auteur des *Pensées*, quelques autographes de Fermat qu'il comprit dans ce qu'il publia ⁽¹⁾. Depuis, ces autographes ont été perdus ou dispersés dans des collections particulières, sauf trois, qui se trouvent reliés dans un recueil des opuscules mathématiques de Pascal, conservé à la Réserve des imprimés de la Bibliothèque Nationale, sous la cote V-848-3.

D'autres originaux de lettres écrites à Mersenne étaient, avant la Révolution, conservées dans le Tome IV d'un recueil formé à la Bibliothèque des Minimes et qu'Arbogast a pu utiliser, comme on le verra plus loin.

La Bibliothèque Nationale possède seulement, comme autographes de Fermat appartenant au département des manuscrits :

1^o Une lettre au Père de Billy (n^o 102) dans le manuscrit fonds latin 8600, f^o 13. Publiée par Libri dans le *Journal des Savants* de septembre 1839, d'après une copie d'Arbogast.

2^o L'original de l'opuscule *Doctrinam tangentium* (ci-après p. 158 et suiv.), fonds français, nouv. acq. n^o 3280, f^o 112-116. Imprimé dans les *Varia* d'après une copie. — Même MS., f^o 108-109, une lettre à Huet (ci-après, p. 386).

3^o Trois lettres et un mémoire adressé au chancelier Séguier (n^{os} 64, 65, 66, 111) : fonds français n^o 17388, f^o 74; n^o 17390, f^o 113 à 115; n^o 17398, f^o 433. Publiés, comme la lettre à Huet, par M. Charles Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, 1880, p. 63 à 72 et 77).

4^o Dans le manuscrit fonds grec n^o 2460, les annotations sur Mannel Bryenne, dont nous devons la découverte à M. Henri Omont et qui sont publiées ci-après, pages 394 et suiv.

La Bibliothèque de l'Université de Leyde conserve dans la Collection Huygens n^o 30 deux lettres autographes de Fermat au mathématicien hollandais. En les publiant (*Recherches, etc.*, p. 77 et suiv., 211 et suiv.), M. Charles Henry a devancé la splendide édition des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences*, qui contient d'ailleurs d'autres matériaux à utiliser pour la Correspondance de Fermat ⁽²⁾.

(1) Voir ci-après, pages 70 et 74 et en outre les n^{os} 69, 71, 73, 74, 100, 107 de la Correspondance. — L'autographe du n^o 71 a passé à la vente Fillon le 16 février 1877. Ceux de la Bibliothèque Nationale sont les originaux du n^o 100 et des deux pièces imprimées dans le présent Volume, pages 70 et 74. Mais, ne les ayant découverts que tout récemment, nous n'avons pu les utiliser que pour les Variantes à la fin du Volume.

(2) L'une de ces lettres, concernant le problème d'Adrien Romain, est insérée dans le présent Volume, pages 189 suiv., l'autre est classée sous le n^o 109 de la Correspondance de Fermat. Quant à la troisième lettre signée Fermat et publiée par M. Ch. Henry (*Recherches, etc.*, p. 78-79) avec une pièce de vers en l'honneur d'Huygens, il a été reconnu

Orma



712

Doctrinam tangentium antequam commendamus tradita methodo
de inventionis maxima et minima cuius beneficio
committuntur questiones omnes dioristica et famosa illa
problema quae apud Pappum in praefatione lib. 7.
officium demonstrationis habere dicuntur parillime
committuntur.

Similia curvae in quibus tangentes inquirimus proprietas
~~quarum~~ spatia et sub lineis tantum etiam absolute
et sub curvis et hi aut alijs curvis quomodolibet
implicatas.

Utrius casui iam satisfactum est praefato quod quic
conatus noster, efficitur sane, sed tamquam tandem
satisfactum est.

Consideramus nunc in se plano curvis et curvae
etiam duas positiones datae. Quarum altera diametrum
si libet aliam applicata nuncupatur. dicitur iam
minutatur tangentes supponuntur ad datum in curva
punctum proprietatem spatialem curvae non in curva
amplius. Idem minutanda tanguntur per adaequationem
consideramus et Elipsi (quae monentur doctrina de maxima
et minima homogenea) et ducuntur aequaliter qua
punctum concavum tangenti aut diametro committunt.
Idem ipsam tangentes.

Exempli quae olim multipliciter aliter addatur
planis tanguntur aequales cuius dicitur tractus minutatur.

figurae ff.

Nous donnons ci-contre un *fac-similé* de la première page de l'écrit *Doctrinam tangentium etc.* Il pourra servir au besoin à reconnaître l'écriture de Fermat. S'il est difficile d'espérer actuellement la découverte de lettres ou d'opuscules autographes, l'impossibilité n'en est nullement démontrée; mais il est un autre ordre de recherches sur lequel nous appelons l'attention des érudits.

Fermat, qui n'avait point de cahiers de notes et ne conservait pas de manuscrits, inscrivait des remarques sur les marges des livres qui lui appartenaient, et il devait le faire, quelle que fût la nature de ses livres. Or il est difficile de croire qu'il y ait eu destruction complète de tous les Ouvrages qui ont fait partie de la bibliothèque d'un homme qui n'était pas seulement un mathématicien de premier ordre, mais qui s'intéressait à toutes les questions scientifiques et qui était un humaniste très distingué. Il semble donc que l'examen de l'écriture des notes inscrites sur les exemplaires des Ouvrages du temps pourrait amener la constatation de leur passage entre les mains de Fermat et conduire à des découvertes intéressantes ⁽¹⁾.

Il est à remarquer que les recherches faites dans ce sens à Toulouse n'ont amené que la découverte, par Libri, à la Bibliothèque de la Ville, d'un exemplaire de la première édition du *Dialogue de Galilée* des *Massimi Sistemi* ⁽²⁾. Sur le premier feuillet de garde est écrite (au-dessus d'une note de Carcavi : « Ce billet est de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement, qui m'a fait présent de ce livre ») la dédicace suivante :

« Peut-estre croirés-vous que pour me mettre en reputation et *per purgar*,
» comme on dit, *la mala fama*, je pretens m'eriger en donneur de livres.

par M. P. Tannery qu'elle ne pouvait avoir été écrite que par Samuel de Fermat : le savant éditeur des Œuvres de Huygens, M. Bierens de Haan, a constaté sur l'autographe la vérité de nos conjectures.

⁽¹⁾ Rappelons à ce sujet que des recherches méthodiques de ce genre, instituées en Italie, par les soins de M. Favaro, ont abouti pour la publication des *Œuvres de Galilée* à des résultats précieux. Si le défaut d'un point de départ, comme était le catalogue de la bibliothèque de Galilée, retrouvé par le savant professeur de l'Université de Padoue, nous a empêchés d'entreprendre de pareilles recherches pour Fermat, nous n'en espérons pas moins que notre appel sera entendu. Nous accueillerons avec reconnaissance toutes les communications qui nous seraient faites à ce sujet et nous pourrions les publier dans un volume complémentaire à la présente édition.

⁽²⁾ Dialogo di Galileo Galilei, Linceo matematico sopraordinario dello studio di Pisa, e filosofo, e matematico primario del Serenissimo Gr. Duca di Toscana. Dove nei congressi di quattro giornate si discorre sopra i due Massimi sistemi del Mondo Tolemaico, e Copernicano. Con privilegi. In Firenze, per Gio. Batista Landini. MDCXXXII. Con Licenza de Superiori (Bibl. de Toulouse $\frac{183}{E}$ nouv. classement : ancien n° 2217).

» Vous en croirés ce qu'il vous plaira, mais si c'estoit par hasard vostre
 » pensée, apprenés donc, Monsieur, que vous n'avez pas touché au but. Je
 » ne songe, en vous offrant les Dialogues italiens du Systeme de Galilée, qu'à
 » faire une action de justice et à vous rendre maistre de l'ouvrage d'un auteur
 » qui ne passeroit, s'il vivoit, que pour vostre disciple ⁽¹⁾. Recevés donc ce
 » present comme vous estant deu, et ne me considerés point en ce rencontre
 » comme un adroit negociateur, mais comme un bon juge qui rejette comme
 » une tentation l'idée de vostre grande et fameuse bibliothèque et ne se sou-
 » vient que de la passion qu'il a d'estre tout à Vous. »

V.

Le premier projet d'édition complète et les papiers de Libri.

A défaut des autographes de Fermat, on possède diverses copies, plus ou moins anciennes, de pièces ou de lettres soit déjà publiées, soit inédites.

L'attention fut pour la première fois appelée sur ces copies, lorsque Libri, dans un article du *Journal des Savants* de septembre 1839, annonça qu'il venait d'acquérir d'un libraire de Metz, par l'intermédiaire du capitaine d'artillerie (depuis général) Didion, un lot de manuscrits provenant de la bibliothèque de Français et ayant antérieurement appartenu à Arbogast. D'après les détails qu'il donnait sur le contenu de ces manuscrits, en particulier sur les matériaux inédits réunis et copiés par Arbogast, d'après ce qu'un article subséquent (*Journal des Savants*, mai 1841) révéla sur les conditions défectueuses dans lesquelles s'était faite l'édition de 1679, aucun assentiment ne pouvait être refusé à l'idée de réunir, dans une publication d'ensemble, les Œuvres déjà imprimées ou encore inédites du grand géomètre de Toulouse. Villemain, alors Ministre de l'Instruction publique, prit l'initiative d'un projet de loi, présenté le 28 avril 1843, pour faire cette publication aux frais de l'État. Lorsque ce projet eut été consacré par le vote des deux Chambres, Libri fut naturellement chargé, en 1844, de diriger la nouvelle édition, et on lui adjoignit un jeune mathématicien, Despeyroux (mort, le 6 août 1883, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse). La collaboration n'aboutit

(1) Pour comprendre ce singulier éloge, il faut savoir que, quoique Carcavi n'ait rien publié sur la matière, il n'en avait pas moins profondément spéculé sur les systèmes astronomiques. Son action en faveur de la conception de Copernic, pour prudente qu'elle ait été, fut certainement très efficace dans le milieu scientifique où il vivait à Paris. Le langage de Fermat atteste, d'ailleurs, que les idées de son ami étaient indépendantes de celles de Galilée.

guère qu'à un résultat (*Journal des Savants*, novembre 1845), une mission de Despeyroux pour recherches à Vienne, Libri ayant constamment refusé de lui donner communication des pièces inédites qu'il avait entre les mains, et prétextant d'un autre côté de nombreuses occupations comme motifs de retards dans l'accomplissement de la tâche qu'il prétendait se réserver. Le 6 juin 1846, une lettre du Ministre de l'Instruction publique, alors Salvandy, le relevait de cette tâche; bientôt après commençait, sur les détournements de livres et de manuscrits dont on le soupçonnait, la longue enquête secrète qui devait aboutir, le 4 février 1848, au dépôt du rapport du juge d'instruction Bouely.

Immédiatement après la révolution de 1848, Libri quittait la France et emportait dix-huit caisses de livres et manuscrits; les papiers qui purent être saisis à son domicile échurent à la Bibliothèque Nationale, où tous ceux qui concernaient Fermat furent réunis dans le manuscrit fonds français, nouv. acq., n° 3280; la publication projetée fut abandonnée et l'idée n'en devait pas être reprise avant trente ans.

En 1879, à la suite d'études entreprises à Paris et d'enquêtes dans les principales bibliothèques de l'Europe, M. Charles Henry publia dans le *Bulletin Boncompagni* un travail que nous avons déjà eu l'occasion de citer d'après le tirage à part :

Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche, par Charles Henry. — Extrait du Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tome VII. Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre 1879. — Rome, imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, Via Lata, n° 3, 1880. — (216 pages gr. in-4°.)

A la suite de cette publication, le prince Baldassare Boncompagni lit connaître, dans une lettre adressée, le 27 mai 1881, à M. Charles Henry, qu'il avait acquis deux manuscrits renfermant les pièces inédites énumérées par Libri en 1839 et qu'il était disposé à les communiquer aux savants qui voudraient entreprendre une nouvelle édition des Œuvres de Fermat. Ces deux manuscrits, qui seront minutieusement décrits plus loin, comme étant une des bases essentielles de notre travail, furent dès lors reconnus comme ayant effectivement été possédés par Libri et comme correspondant à ce qu'il avait signalé de plus important dans son acquisition de Metz. Mais Libri n'ayant jamais fait connaître exactement quelles pièces de Fermat il avait entre les mains, ayant d'autre part inséré dans le *Catalogue of the Manuscripts at Ashburnham-place* des mentions qui pouvaient faire croire à l'existence, dans le fonds cédé par lui au célèbre collectionneur anglais, de très nombreuses

pièces intéressant la publication projetée à nouveau, il était essentiel de vérifier ce qui en était.

Cette vérification ne put être faite avant l'acquisition, par la Bibliothèque Nationale, du fonds Libri de la collection Ashburnham. Elle a en grande partie déçu les espérances que l'on avait pu concevoir ⁽¹⁾; on n'a retrouvé, sous le n° 1848 de Libri ⁽²⁾, qu'une seule chemise de pièces provenant de Fermat. Le dépouillement de ces pièces, que, grâce à l'obligeance de M. Léopold Delisle, nous avons pu faire dès le commencement de l'année 1888 et avant le classement nouveau, nous a fait reconnaître :

1° Une seule pièce non connue d'ailleurs (*voir* ci-après, page 87, note 1), sur le lieu à trois lignes;

2° D'anciennes copies de l'*Ad locos planos et solidos isagoge*, avec l'*Appendix* (page 91, note 1) de la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (page 133) et du *Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus* (page 181), opuscules déjà imprimés dans les *Varia Opera*;

3° Une copie d'une lettre de Fermat à Carcavi, laquelle se trouve plus complète dans le manuscrit de la Nationale, fonds latin 11196, n° 68 de la Correspondance. — (Publiée par M. Ch. Henry, *Recherches*, etc., pages 193 à 195.)

Des anciennes copies, celle de l'*Isagoge* est d'ailleurs seule à offrir un véritable intérêt.

VI.

Le manuscrit Arbogast-Boncompagni.

Parmi les autres sources manuscrites qui ont été utilisées pour cette édition, nous devons signaler, en premier lieu, les deux volumes très importants appartenant au prince Baldassare Boncompagni, à Rome, lequel les a généreusement mis à notre disposition.

Le premier de ces manuscrits, que nous désignerons par la lettre A, est un volume haut de 27^{cm}, large de 21^{cm},5, comportant une reliure italienne récente en basane blanche décorée de filets d'or, laquelle présente au dos une

⁽¹⁾ Notamment le n° 1895 du *Catalogue* précité n'a pas été retrouvé; Libri ne paraît pas l'avoir livré à lord Ashburnham; dans le n° 1860, malgré les indications du même catalogue, rien de Fermat n'a été trouvé.

⁽²⁾ Ce numéro était représenté par trois portefeuilles où étaient classées des feuilles séparées. Les pièces sont aujourd'hui réparties entre les manuscrits : fonds latin, nouv. acq. 2339, 2340, 2341; fonds français, nouv. acq. 5173, 5176. Celles relatives à Fermat se trouvent dans le premier de ces cinq manuscrits.

vitole imprimée : *Fermat, Opusculs et lettres*. Outre deux feuillets de garde (en tête et à la fin), on compte, dans ce volume, 83 feuillets numérotés au crayon de 1 à 82 (le n° 50 manquant, et, deux feuillets étant numérotés : 12 *bis* et 13 *bis*, ainsi que le mentionne, au reste, une annotation au crayon sur le second feuillet de garde). Ce numérotage au crayon a été fait dans la bibliothèque du prince Boncompagni.

Sur le feuillet 1 est écrit de la main de Libri :

Lettres de Fermat | *par ordre* | *comme dans la liste de de' (sic) Arbogast* | *plus la lettre au père Billy et celle à Carcavi.* | *Plus une copie de la lettre imprimée (anonyme) de Frenicle* [corrigé de « Fermat »] *à Digby* | *où il est fait mention d'un* | *autre écrit imprimé précédemment (1657)* | *par Frenicle* [corrigé de « Fermat »].

Puis, de la même main, mais d'une écriture plus récente, de même que les corrections indiquées ci-dessus :

(Voyez *Comm. op. de Wallis*.)

En haut de la page est la signature « F. Lepelle de Bois-Gallais », et sur tous les feuillets suivants le visa correspondant : F. L. B. G.; ce qui permet d'établir que l'ensemble a été vendu, à Londres, par Libri en pièces détachées. Le prince Boncompagni l'a acquis, déjà relié, du comte Giacomo Manzoni, le 17 janvier 1876.

Fo 2 commence (finit fo 5) de la main d'Arbogast, qui remplit tout le reste du volume, l'*Indication des opusculs mathématiques et lettres de Fermat qui se trouvent en manuscrit dans le Tom. IV des lettres écrites au P. Mersenne par des savans conservé à la Bibliothèque des ci-devant Minimes à Paris* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nous reproduisons cette liste, qui a été déjà publiée, avec quelques incorrections, par Libri dans le *Journal des Savants* de septembre 1839. On remarquera qu'elle comporte 14 numéros pour les opusculs et 20 pour les lettres, en dehors de quelques pièces ne concernant pas Fermat.

« N° 1. Le traité des contacts sphériques, en latin, sans titre, 31 pages in-folio, très belle écriture, peu serrée, et les figures faites en grand. Cette copie ^(a) ne diffère pas de l'opuscule imprimé dans les *Opera Varia* en 1679. Il y a sur la première page : *Opus D. de Fermat*.

N° 2. *Isagoge ad locos ad superficiem*, en latin, in-4°. 17 pages : belle copie et très lisible.

Cet opuscule, duquel Fermat faisait beaucoup de cas, n'a jamais été imprimé.

N° 3. *Ad methodum de maximâ et minimâ appendix*. Commence par ces mots : *Quia plerumque in progressu questionum occurrunt asymmetricæ, etc.*, et finit par ceux-ci : *et*

^(a) « Cette copie » a été corrigé de « Cet opuscule ».

C'est ce que Libri appelle *la liste d'Arbogast*, et l'on trouve effectivement, à la suite et par ordre, les 20 lettres de cette liste, toutes inédites, qui occupent les feuillets 6 à 44 du manuscrit.

opere tangentibus indigeant; 3 pag. in-folio; copie d'une main inconnue. Cet opuscule n'a pas ^(a) été imprimé.

N° 4. Opuscule sur la méthode des tangentes, commence par ces mots : *Doctrinam tangentium antecedit jamdudum habita methodus de inventione maximæ, etc.*, et finit par ceux-ci : *fusus aliquando explicabimus et demonstrabimus*; 14 pag. in-folio, belle copie, écriture peu serrée. Cet opuscule a été imprimé dans les *Opera Varia*.

N° 5. *Ad methodum de maximâ et minimâ appendix*; 4 pages $\frac{1}{2}$ in-4°, écriture de Fermat. C'est le même opuscule que n° 3.

Suivent 10 pages in-folio, écriture de Mersenne, très serrée, souvent difficile à lire. Ces pages contiennent de suite ^(b), savoir :

N° 6. *De maximis et minimis*, par Fermat, commence par ces mots : *Outre le papier envoyé à R. et P., pour suppléer, etc.*; $\frac{1}{2}$ pag. in-folio, dont nous n'avons pu lire les trois dernières lignes (inédit); il paraît que c'est l'extrait d'une lettre à Mersenne.

N° 7. *Méthode des maximis expliquée et envoyée par M. F. à ^(c) M. des C.*, commence par ces mots : *La méthode générale pour trouver les tangentes, etc.*, et finit par ceux-ci : *aux cônes de même base et de même hauteur*; 3 pag. in-folio (inédit).

N° 8. Extrait d'une lettre de M. Fermat. Commence par ces mots : *N'importe de dire qu'il faut faire deux opérations*. Cette lettre, dont on trouve ^(d) plus bas le commencement de l'original, roule sur la méthode des tangentes, en réponse ^(e) aux objections de Descartes ^(f).

Le commencement de la lettre manque dans cet extrait, mais il y a ^(g) 2 lignes $\frac{1}{2}$ de plus à la fin ^(h) que dans le fragment original, qui finissent par ces mots : *Je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'en la sienne*. $\frac{1}{2}$ pag. in-folio (inédit).

N° 9. *Appendix ad Isagogen topicam continens solutiones problematum solidorum per locos*, commence par ces mots : *Patuit methodus, etc.*, et finit par ceux-ci : *per rectas et circulos expedire*; 2 pag. in-folio (imprimé dans les *Opera Varia*).

N° 10. Opuscule sur la méthode des tangentes, commence par ces mots : *Doctrinam tangentium antecedit, etc.*; le même que n° 4. 2 pag. $\frac{1}{2}$ in-folio (imprimé).

N° 11. *Des nombres des parties aliquotes de F.* Commence ainsi : *Propos. ⁽ⁱ⁾ Tout nombre impair non quarré est différent d'un quarré, etc.*, et finit par ces mots : *sont beaucoup éloignez l'un de l'autre*; $\frac{3}{4}$ pag. in-folio (inédit); remarquable par la méthode qui s'y trouve pour ^(j) trouver les nombres premiers. Il paraît que cette pièce est l'extrait d'une lettre de Fermat à Mersenne ou à Frenicle.

N° 12. *Pour les nombres premiers de M. Ferm. à Fren.*, commence par ces mots : *Soit*

^a Le mot *encore* a été rayé après *par*.

^b Ces mots de suite ont été ajoutés en interligne.

^c Avant « R. et P. », sont les mots rayés « Fermat et ».

^d Après le mot *traverse*, est écrit, puis rayé, « le com. ».

^e Après le mot *réponse*, est écrit, puis rayé, « à D. ».

^f La phrase suivante commence par les mots *lui manque*, rayés.

^g Le mot *deux* a été rayé devant le chiffre.

^h Les mots *à la fin* sont ajoutés en marge.

ⁱ Ce mot *Propos.* avait d'abord été écrit après « de F. ». Il y est rayé.
Le mot *point* est déjà écrit, puis rayé, après *méthode*.

La lettre à Billy annoncée par Libri ne se trouve, au contraire, qu'à la fin du volume (f° 82), copiée par Arbogast avec ce titre :

Lettre de Fermat au P. Billy. Se trouve aux manuscrits de la Bibliothèque Nationale à Paris. n° 8600; c'est la seule lettre de Fermat qui soit dans ce recueil de lettres adressées au P. Billy.

F° 45-48 on trouve, au contraire, l'*Extrait d'une lettre de Fermat à Car-*

par exemple la progression double, etc., finit par ceux-ci : *peine à me dédire* : $\frac{1}{2}$ pag. in-fol. (inédit) Il paraît que c'est l'extrait d'une lettre de Fermat à Frenicle.

On trouve présentement sur deux demi-feuilles séparées, pliées chacune in-4°, écriture de Mersenne, serrée, souvent difficile à lire, savoir :

N° 13. Exposition détaillée et ^(a) démonstration de la méthode des *maximis* et *minimis*, avec la manière dont l'Auteur y est parvenu. Cette ^(b) opuscul est sans titre. Son commencement est : *Dum syncretiscos et anastrophes Victoræ methodum expendere, etc.*, il finit par ces ^(c) mots : *summa trium harum* ^(d) *rectarum sit minima quantitas*; 4 pages in-4°. Cette pièce, une des plus importantes des œuvres de Fermat ^(e), n'a jamais été imprimée.

N° 14. *Ad methodum de minimi et maximi appendix*. C'est la même pièce que n°s 3 et 3. Elle est ici sur 3 pages in-4°.

Suivent les lettres originales de Fermat, savoir (toutes ces lettres sont *incédites*) ^(f) :

1^{re} lettre à Mersenne, en latin, sans date, *Reverende pater, quavis id agam ut pro OEdipo damnum* ^(g) *restitutum, etc.*, 4 pages in-folio, écriture de Fermat.

2^e lettre à Mersenne, Tolose, 26 avril 1636; 2 pages in-folio, écriture de Fermat.

3^e lettre à Mersenne, Tolose, 25 décembre 1640; 5 pages in-4°, écriture de Fermat.

4^e lettre à Mersenne, du 15 juin 1641; 1 $\frac{1}{2}$ pages in-4°, écriture de Fermat.

5^e lettre à Mersenne, Tolose, 13 janv. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

6^e lettre à Mersenne, Tolose, 16 févr. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

7^e lettre à Mersenne, Tolose, 7 avril 1643; 3 pages in-4°, écriture de Fermat.

8^e lettre à Mersenne, Tolose, 10 août 1638; 2 pages in-4°.

9^e lettre à *Copie de la lettre de M. Fermat, du 26 décembre 1638*. Commence ainsi : 1° *Pour les nombres, je peux trouver par ma méthode, etc.*, et finit par : *de Géométrie qui vultent celle-ci*; écriture de Mersenne, 1 $\frac{1}{4}$ page in-4°. Cette copie, ou cet extrait de la lettre de Fermat faite par Mersenne, est écrite sur ce qui restait de blanc à la lettre précédent. L'écriture est difficile à lire.

10^e pièce ou lettre, sans inscription, commence par ces mots : *Dudum est ex quo ad*

^(a) Le mot *la* a été rayé après *et*.

^(b) Arbogast avait d'abord voulu écrire *Cette pièce*. Les trois premières lettres du mot *pièce* se trouvent, en effet rayées après *Cette*, qui n'a pas été corrigé.

^(c) Le mot *ceux*, rayé, précède *ces*.

^(d) Le mot *harum* est déjà écrit, puis rayé, avant *trium*.

^(e) Les mots *de Fermat* sont écrits en interligne à la place des mots *du recueil*, qui sont rayés.

^(f) Les mots entre parenthèses ont été ajoutés après coup. Arbogast avait d'abord écrit « *in dit* » après la notice des lettres 1, 2, 3, à la fin pour la première, avant « *écriture de Fermat* » pour les deux autres. Il a rayé ensuite ces mentions.

^(g) Lisez *Damian*.

casi. — d'après la copie de Bouillaud, conservée dans les *Manuscripts de Bouillaud, Lettres de différentes personnes* Bibliothèque nationale.

La chemise de cette lettre avec le titre *Lettre à Carcavi* de la main de Libri est actuellement le f° 95 du manuscrit de la Nationale : *Fonds français n° 3280 nouv. acq.* (voir plus haut, page xxi) que nous désignerons par la lettre A₁.

Enfin la copie par Arbogast de la lettre imprimée de Frenicle manque, de même, dans le manuscrit A et occupe les folios 96-98 de A₁.

Au folio 49 de A, qui est une chemise portant le titre : *Isagoge ad locos ad superficiem*, Libri a écrit au-dessous de cette mention :

Opusculs mathématiques de Fermat inédits. Ce sont les nos 2, 3, 6, 7, 11, 12, 13 de la liste d'Arbogast.

Le n° 10 est ajouté, au crayon bleu, à cette nomenclature.

On trouve, en effet, dans leur ordre régulier, les opusculs en question sur les f° 51 à 81 du manuscrit dont le contenu se trouve ainsi épuisé.

Il convient de remarquer que le n° 10 n'est nullement inédit. Libri n'avait pas primitivement l'intention de le comprendre dans le recueil devenu aujourd'hui la propriété du prince Boncompagni; c'est même certainement

similitudinem paraboles, etc.; et finit par ceux-ci : *ex animo rogamus*; 3 $\frac{1}{2}$ pages in-4°, écriture de Fermat (inédite). Il paraît que c'est une réponse de Fermat à des questions faites par Cavalieri, et qu'il a ^(a) envoyé cette réponse à Mersenne, pour la faire parvenir soit à Cavalieri, soit à Toricelli ^(b).

11. Fragment de ^(c) lettre à Mersenne; commence ainsi : *J'avois déjà fait un mot d'écrire pour m'expliquer, etc.*, finit par ces mots : *habeat minimum proportionem, daturus*; 2 pages in-4°, sans date (c'est le commencement de la lettre dont le n° 8 est un extrait; cet extrait, sans contenir le commencement, a 2 $\frac{1}{2}$ lignes de plus à la fin), écriture de Fermat.

12. *Invenire cylindrum maximè ambitus in datâ spherâ*. Cette solution géométrique est sans figure, sur 2 pages in-4°, écriture de Fermat, elle ^(d) appartient à la lettre suivante.

13. lettre à Mersenne, du 10 nov. 1642; 1 $\frac{1}{2}$ page in-4°, écriture de Fermat ^(e).

14^e lettre à Mersenne, Tolose, 1 sept. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

15. Fragment final d'une lettre à Mersenne, Tolose, 15 juillet 1636; 1 $\frac{1}{2}$ pages in-4°; écriture de Fermat.

Ici se trouve sur 1 page in-4° une lettre de Picot à Mersenne, sans date, qui contient

^a Le mot *a* est en interligne.

^b Arbogast avait ajouté la mention : *Écriture de F*, qu'il a rayée.

^c Les mots *fragment de* sont ajoutés en interligne.

^d Le mot *parait* est rayé après *elle*.

^e Libri a ajouté en marge : *avec 10*.

par mégarde qu'il l'a emporté à Londres en 1648, tandis qu'il laissait à Paris des pièces qu'il aurait voulu, au contraire, conserver pour ce recueil.

Des opuscules inédits de la liste d'Arbogast, les nos 6, 7, 11, 12, qui sont en français, figureront dans la Correspondance de Fermat sous les nos 26, 31, 37, 43. Les autres se trouvent dans le présent Volume.

Quant aux 20 lettres inédites, les nos 10 et 12 sont insérés ci-après, pages 195 et 167; pour les autres, la correspondance sera la suivante avec notre édition :

N ^{os} de la liste d'Arbogast.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	14	15	16	17	18	19	20
N ^{os} de la Correspondance de Fermat.....	12	1	45	47	52	55	56	33	36	30	51	60	6	54	46	28	59	35

VII.

Le manuscrit Vicq-d'Azyr-Boncompagni.

Nous désignerons par la lettre B le second manuscrit que le prince Boncompagni a bien voulu nous communiquer et qu'il a acquis dans les mêmes conditions que le précédent.

la solution de Descartes touchant le centre de percussion. Cette solution est imprimée dans les lettres de Descartes.

16^e lettre à Mersenne, sans date, commence ainsi : *Je vous rends mille grâces, etc.*, 1 pag. in-4°, écriture de Fermat.

17^e lettre à Mersenne, Tolose, 26 mars 1641; 1 $\frac{1}{2}$ page in-4°, écriture de Fermat (^a).

18^e lettre à Mersenne, sans date, commence ainsi : *J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes, etc.*; 2 $\frac{1}{3}$ pages in-4°, écriture de Fermat.

19^e lettre à Mersenne, sans date, commence par ces mots : *Vous m'écrivez que la proposition de mes questions impossibles, etc.*; 3 pag. in-4°, écriture de Fermat.

Ici se trouve un mémoire latin sur la métallurgie et la docimasie.

20^e lettre à Mersenne, 22 oct. 1638; 9 pages in-4°, écriture de Fermat; le commencement, qui traite d'affaires particulières, manque importante (^b).

Fin.

N^a. — A la suite des lettres de Fermat se trouvent 168 pages in-4° de lettres de Letteur à Mersenne; elles roulent particulièrement sur les objections de Fabry et de Cazré

(^a) Libri a ajouté en marge, puis rayé : avec n^o 4.

(^b) Le mot *Cette* se trouve écrit, puis rayé, avant *importante*.

C'est un Volume haut de 39^{cm}, large de 21^{cm},5, relié en peau de porc et portant au dos l'inscription :

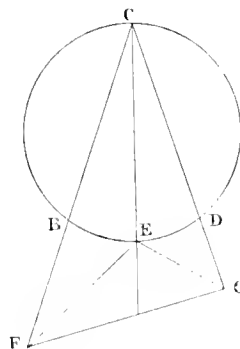
Copie de lettres de Fermat de Descartes et Traduction d'un Discours de Galilée.

Sur le plat de la couverture est au milieu le chiffre 1, en haut, à gauche, le chiffre 4. Ces deux mêmes chiffres sont reproduits au milieu du premier feuillet (de garde).

Lorsque le Volume s'est trouvé entre nos mains, nous avons également reconnu, sur le même plat, quelques traces de lettres effacées. L'emploi du tannin nous a permis de revivifier, en haut, l'inscription « *Au Citoyen*

contre les démonstrations de Galilée sur la descente des graves; quelques observations sur la dispute entre Roberval et Descartes. Leteneur marque qu'il est allé voir de Beame à Blois et que *superat presentia famam*; il fait le récit de l'entretien qu'il eut avec lui, quoiqu'il fût très malade, et qu'on lui eût coupé le pied, il communique à Mersenne le problème suivant qui venait de lui être proposé, et dont il n'avait pu encore trouver la solution.

Un cercle étant donné comme BCD, et une ligne FG dehors, tirer de ses extrémités F,



G deux lignes droites à la circonférence convexe ou concave comme en E ou en G, dont l'angle soit coupé en deux parties égales par le diamètre.

Ces lettres contiennent peu de choses intéressantes; on peut en tirer quelques faits ou quelques anecdotes concernant l'histoire des sciences. On y voit, par exemple, que le jeune Huygens avoit fait un écrit avant ou en 1647 pour défendre et démontrer, à sa manière, les propositions de Galilée sur la descente des graves.

Toutes ces lettres sont de 1647 et 1648. •

Avant les lettres de Fermat, on trouve à la tête de (a) ce volume une longue lettre de Tho. Hobbes à Mersenne, du (b) 5 nov. 1640, en 56 pages in-folio. »

(a). Les mots à la tête de sont une correction du mot dans.
Le mot du est ajouté en interligne.

Mauduyt » d'une écriture passablement fine et, vers le milieu, la note suivante :

N. B. 2 ventôse
Ce volume faisoit
partie du paquet de
papiers trouvés chez
Vieq d'Azir, après sa
mort, et renvoyés à la
Bibliothèque de la
ci-devant Académie
des Sciences comme
lui appartenant.

Cette note, qui est de la main facilement reconnaissable d'Arbogast, n'avait pas été écrite directement sur la couverture, mais bien sur un carré de papier collé dessus. Ce carré de papier a probablement été enlevé par Libri, entre les mains duquel le Volume est passé, comme le prouvent surabondamment les annotations qu'il y a inscrites en marge des lettres de Descartes.

Quoique ce Volume soit passé entre les mains d'Arbogast, il ne l'a pas utilisé pour ses copies, comme le montre la collation des pièces identiques de A et de B.

Ce dernier manuscrit comprend 118 feuillets numérotés (au crayon), mais c'est en réalité un recueil factice et nous n'avons à décrire que la partie qui concerne Fermat et qui vient en tête.

Cette partie comprend trois cahiers, le premier de 8 feuillets, le deuxième et le troisième de 12; les trois derniers feuillets sont entièrement blancs.

Le n° 2 inscrit au bas de la première page du premier cahier et la forme du début, sans titre et tout au haut de la page, prouvent l'existence antérieure d'un autre cahier précédent, qui est aujourd'hui perdu. Toutefois les traces d'encre qui se sont produites, au moment de la reliure, sur le feuillet de garde et le revers de la couverture, montrent que la perte a précédé la formation du recueil factice.

L'écriture est du dix-septième siècle, serrée et peu lisible.

Voici le détail des pièces contenues dans ce manuscrit; les unes sont des extraits de lettres déjà imprimées dans les *Varia*; d'autres sont des copies de lettres figurant dans la liste d'Arbogast; quelques-unes enfin ne sont pas connues d'ailleurs.

1. F^o 2^o. Extrait d'une lettre du m^{me} no^{bre} 1636 à M. de Roberval pour la quadrature de la parabole (*Varia*) = n° 13 de la Correspondance de Fermat.
2. F^o 2^o. Extrait d'autre lettre du mesme du 4 juin 1648 au R. P. M. = n° 63.
3. F^o 2^o. Extrait d'autre lettre du xx^{me} febvrier 1639 au R. P. M. = n° 37.

4. F^o 3^o. Extraict d'autre lettre du 1^{er} avril 1640 au R. P. M. (en partie dans les *Varia*).
= n^o 38.
5. F^o 5^o. Autre lettre au R. P. M. (*Varia*) = n^o 49.
6. F^o 6^o. Autre lettre au mesme = n^o 34.
7. F^o 7^o. Extraict d'autre lettre du 18^e octobre 1640 à M. F. (*Varia*) = n^o 44.
8. F^o 8^o. Extraict d'autre lettre (*Varia*) = n^o 42.
9. F^o 9^o. Extraict d'une lettre du 31 may 1643 à M. D. F. = n^o 58.
10. F^o 10^o. Copie de lettre du 22^{me} octobre 1648 (26^e lettre de la liste d'Arbogast) = n^o 35.
11. F^o 11^o. Epistola Dⁿⁱ de Fermat ad R. P. Mersennum (Arbogast, 1^{re} lettre) = n^o 42.
12. F^o 14^o. (Arbogast, 16^e lettre) = n^o 54.
13. F^o 15^o. (Arbogast, 1^{re} lettre) = n^o 47.
14. F^o 15^o. (Arbogast, 2^e lettre) = n^o 4.
15. F^o 17^o. (Arbogast, 13^e lettre) = n^o 51.
16. F^o 17^o. (Arbogast, 19^e lettre), *ci-après*, page 167.
17. F^o 18^o. (Arbogast, 16^e lettre), *ci-après*, page 193.
18. F^o 19^o. (Arbogast, 3^e lettre) = n^o 45.
19. F^o 21^o. (Arbogast, 18^e lettre) = n^o 28.
20. F^o 22^o. (Arbogast, 7^e lettre) = n^o 56.
21. F^o 22^{bis}. (Arbogast, 19^e lettre *en partie*) = n^o 59.
22. F^o 22^{ter}. (Arbogast, 14^e lettre) = n^o 60.
23. F^o 23^o. (Arbogast, 6^e lettre) = n^o 55.
24. F^o 24^o. (Arbogast, 17^e lettre) = n^o 46.
25. F^o 24^o. (Arbogast, 8^e lettre) = n^o 33.
26. F^o 25^o. (Arbogast, 9^e lettre) = n^o 36.
27. F^o 25^o. (Arbogast, 15^e lettre) = n^o 6.
28. F^o 26^o. (Arbogast, 11^e lettre) = n^o 30.
29. F^o 26^o. Lettre de M^r Fermat (à Frénicle) = n^o 48.
30. F^o 28^o. Frénicle respond (tiré d'une lettre imprimée dans les *Varia*) = n^o 49.
31. F^o 28^o. Copie d'une lettre du père Mersenne et de la response de M^r de S^t Martin
con^{te} du Grand Conseil.
32. F^o 29^o. Lettre de Mons^r Pujos au père Mersenne.

Ces deux dernières pièces seront publiées dans le Volume de *Complément*.

VIII.

Les manuscrits de la Nationale, etc.

Les autres manuscrits utilisés par nous, appartenant à des bibliothèques publiques et ayant déjà été étudiés par M. Charles Henry dans ses *Recherches*, n'ont pas besoin d'une description aussi complète que les précédents.

Nous n'avons d'ailleurs à nous étendre un peu longuement que sur le n^o 3280 fonds français nouv. acq., désigné par nous sous la lettre A₁ et formé, comme nous l'avons dit, avec les papiers relatifs à Fermat qui ont été saisis en 1848 chez Libri.

Nous avons déjà noté plus haut l'existence, dans ce manuscrit, de l'original : *Doctrinam tangentium etc.*, et de deux feuillets ayant fait partie du recueil d'Arbogast; ce sont là des pièces que Libri a certainement laissées par mégarde en France, tandis qu'il négligeait le reste de « l'énorme cahier » qu'il a dit avoir acquis à Metz.

Ce reste occupe les feuillets 91 à 98 et 120 à 192 du manuscrit A₁, où il est facile de reconnaître l'écriture d'Arbogast. On peut y distinguer :

1^{re} Divers brouillons des copies au net contenues dans le manuscrit A, savoir la lettre n^o 9 et les opuscules 13, 6, 7, 11, 12 de la liste d'Arbogast (textes publiés par M. Ch. Henry, *Recherches*, 2^e partie, n^{os} 15, 17, 18, 19, 21, 22);

2^o Des copies ou extraits de quelques pièces déjà imprimées dans les *Varia*;

3^o Des extraits (ou notes tirées) des Ouvrages de Descartes (en particulier de ses Lettres), Fagnano, Mersenne, Wallis, Hérigone, Viète, Albert Girard, Euler, Lagrange;

4^o Des essais de démonstrations sur diverses questions traitées par Fermat;

5^o Des notes bibliographiques sur divers manuscrits de la Nationale ou sur des Ouvrages mathématiques imprimés;

6^o Une copie, tirée de l'un de ces manuscrits, de la *Proposition de M. de Roberval qui sert à trouver les centres de gravité envoyée à M. Fermat le 1^{er} avril 1645*.

En somme, Arbogast ne semble pas, malgré ses recherches sérieusement poursuivies, être arrivé à découvrir aucune autre pièce inédite de Fermat que celles du manuscrit A.

En dehors de documents qui n'intéressent guère que l'histoire du projet de publication sous le gouvernement de Louis-Philippe, le manuscrit A₁ contient encore les copies faites à Vienne par Despeyroux (f^{os} 25 à 90) de la correspondance entre Fermat et Clerselier, etc., d'après les minutes de ce dernier et des copies faites par ou pour lui.

La Bibliothèque Nationale nous a encore fourni, abstraction faite des originaux mentionnés plus haut, quelques copies anciennes éparses dans divers manuscrits :

Fonds latin 7226 : f^{os} 34 et suiv. Copies de lettres de Roberval à Fermat du 11 octobre 1636 et du 16 août 1636, déjà imprimées dans les *Varia*, mais la seconde avec un texte complètement refondu.

Fonds latin 11196 : f^{os} 46 à 53. *Novus secundarum et ulterioris ordinis*

radicum in analyticis usus (ci-après, p. 181) — f° 54. Lettre de Fermat à Carcavi (voir plus haut, sur les papiers du fonds Libri).

Fonds latin 11197 : f°s 17 à 20. Copie de la lettre n° 12 de la liste d'Arbogast (ci-après, p. 167) — f° 20. Extrait de la lettre de Fermat à Mersenne du 3 juin 1636 (la première lettre des *Varia*).

Fonds français 30945, Cahier 17 : f° 65. Copie de la lettre de Fermat à Pascal du 29 août 1654 (imprimée dans les *Œuvres de Pascal*) — f° 78. Copie d'une lettre sans adresse ni nom d'auteur, mais que M. Ch. Henry a reconnue comme écrite par Fermat à Carcavi et qu'il a publiée (*Recherches*, pages 197 à 200, n° 76 de la Correspondance).

La Bibliothèque de l'Université de Leyde possède, dans le manuscrit n° 997 Burmann Q. 22, copie de deux lettres échangées entre Huet et Fermat (ci-après, pages 386 et 388) publiées par M. Ch. Henry ⁽¹⁾ (*Recherches*, pages 73-77).

Nous avons déjà signalé les autographes de Fermat que possède la même bibliothèque dans la collection Huygens. La correspondance de Carcavi de cette collection a été publiée par M. Ch. Henry soit dans ses *Recherches* (pages 213 à 216), soit dans son *Pierre de Carcavi* [pages 14 à 40 du tirage à part ⁽²⁾]. Elle renferme d'importants extraits des lettres de Fermat à Carcavi; l'un d'eux est publié ci-après, page 285, les autres formeront les n°s 77, 78, 101, 105, 106, 110 de la Correspondance de Fermat.

IX.

Plan de la nouvelle édition.

Telles sont les sources imprimées et manuscrites qui ont été à notre disposition pour la préparation de la présente édition; il nous reste à exposer

⁽¹⁾ La lettre de Huet est également copiée dans le manuscrit de la Nationale, fonds latin 11433. Nous avons dit que l'original de celle de Fermat subsiste dans notre manuscrit A₁, f°s 108 et 109.

⁽²⁾ Pierre de Carcavi, intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, bibliothécaire de Colbert et du Roi, directeur de l'Académie des Sciences, par M. Charles Henry. — Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, tomo XVII, maggio, giugno 1884. — Rome, imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques, Via Lata n° 3, 1884.

le plan qui a été adopté par la Commission de publication ⁽¹⁾ et à expliquer certaines dispositions particulières.

L'édition doit comprendre trois Volumes : le premier renfermant d'une part les *Œuvres mathématiques diverses*, et de l'autre les *Observations sur Diophante*, les deux suivants seront consacrés à la *Correspondance de Fermat* qui sera classée par ordre chronologique et contiendra aussi bien les lettres qu'il a écrites que celles qu'il a reçues.

Tous les opuscules de Fermat étant en latin, un écrit de lui en français appartient nécessairement à sa correspondance; mais il a rédigé dans la langue savante même un certain nombre de lettres, plus soignées que les autres, plus exclusivement mathématiques ou qu'il pensait devoir être, plus que les autres, copiées et communiquées. Comme d'autre part ses opuscules affectent parfois la forme épistolaire, et qu'ils n'étaient pas destinés à une autre publicité que ses lettres écrites en latin, comme aussi les fragments isolés composés dans cette langue ont été au moins envoyés par lui avec ses lettres, quand ils n'en ont point été simplement extraits, on peut parfois hésiter pour classer une pièce latine, soit dans les opuscules, soit dans la correspondance.

Pour se mettre en garde contre tout reproche d'arbitraire à cet égard, il eût fallu pouvoir affecter le premier Volume à tous les écrits latins de Fermat; mais cette solution n'était guère praticable, car il arrive à notre géomètre de passer, dans la même lettre et parfois sur le même sujet, d'une langue à l'autre. On serait également tombé dans le grave inconvénient de détruire assez souvent l'unité d'un groupe de lettres et de rompre le fil chronologique de la correspondance.

On a donc préféré se borner à conserver le cadre général des *Varia Opera*, en y rattachant tous les morceaux qui y ont paru trouver une place plus naturelle que dans la Correspondance, où ils auraient été isolés et la plupart à une date incertaine.

L'ordre chronologique des opuscules ne pouvant d'ailleurs dans bien des

(1) La publication des Œuvres de Fermat a fait l'objet d'une proposition de loi présentée le 16 février 1882; cette loi a été votée par la Chambre le 13 mai, par le Sénat le 4 juillet, et promulguée le 13 juillet 1882. L'impression a été confiée à MM Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-éditeurs, qui se sont chargés de ce travail moyennant une souscription à 200 exemplaires.

La principale cause du retard apporté à la publication est due à l'espérance, aujourd'hui reconnue comme illusoire, de trouver des matériaux importants dans les manuscrits de lord Ashburnham (fonds Libri), manuscrits dont il n'a pas été possible de prendre connaissance avant l'acquisition de ce fonds par la Bibliothèque Nationale.

cas être rigoureusement établi, il fallait adopter un ordre méthodique. Celui des *Varia*, n'ayant aucune valeur réelle, ne pouvait servir de point de départ; on s'est arrêté aux principes suivants :

Constituer une série de groupes dont l'ordre représentât le développement des idées de Fermat, tel qu'il apparaît du moins si l'on prend dans chaque groupe l'écrit le plus ancien et si l'on range cet ensemble par ordre de dates;

Adopter dans l'intérieur de chaque groupe le classement chronologique pour les opuscules les plus importants; rejeter à la fin du groupe les fragments (généralement mal datés) et les ranger par ordre de questions.

On reconnaîtra facilement dans la Table des matières ci-avant les groupes qui ont été ainsi formés et qui, au reste, étaient déjà tous représentés dans les *Varia Opera*; on peut les dénommer comme suit : 1^o Géométrie à la manière des anciens; 2^o Géométrie analytique (inventée et développée indépendamment de Descartes); 3^o Méthodes des maxima et minima et des tangentes (origine du calcul différentiel); 4^o Théorie des équations (notamment une méthode d'élimination générale); 5^o Quadratures (origine du calcul intégral).

La langue dont s'est servi Fermat et la désuétude où sont tombés, même dans le latin que lisent encore les mathématiciens, un grand nombre des termes techniques dont il se sert, ont paru rendre désirable une traduction française; la Commission a jugé qu'il serait préférable de ne la publier qu'à part des Œuvres de Fermat dans un Volume spécial de *Complément*, où l'on donnera également des traductions : d'une part, de l'*Inventum novum* rédigé par le P. de Billy d'après les lettres que lui avait adressées Fermat et publié dans le *Diophante* de 1670; de l'autre, du *Commercium epistolicum* de Wallis; aucun de ces deux Ouvrages n'a, en effet, de titres suffisants pour figurer dans les Œuvres mathématiques ou dans la Correspondance de Fermat, et leur réimpression n'offre pas d'intérêt véritable; leur connaissance est cependant indispensable pour l'histoire scientifique de Fermat.

Le *Complément* comprendra encore, dans le même but historique, les nombreux extraits que l'on peut tirer, relativement au géomètre de Toulouse, des lettres de Descartes et divers autres témoignages des contemporains, en particulier de Mersenne.

Enfin, la Commission a jugé que les éditeurs devaient limiter leurs notes au minimum indispensable pour l'intelligence du texte (renvois compris) et les renseignements bibliographiques; mais elle a décidé la rédaction de trois index : l'un des noms propres; le deuxième de la langue mathématique de Fermat; le troisième des matières.

X.

Remarques pour la lecture du texte.

Le présent Volume ne contenant que des écrits latins, nous n'avons à parler aujourd'hui que des règles qui ont été admises pour la constitution du texte en cette langue.

L'édition des *Varia* est d'une singulière incorrection; les originaux font défaut, à une seule exception près, qui permet d'ailleurs (*voir* page 159 note 2) de constater que Fermat les écrivait assez précipitamment pour ne pas éviter certains *lapsus calami*; enfin les copies laissent également plus ou moins à désirer.

Dans ces conditions, on a supposé que le texte de Fermat devait, avant toutes choses, être correct, soit pour le sens, soit pour la langue, et partout où il a paru corrompu, on s'est efforcé de le restituer en se conformant le plus possible aux indications des sources et aux habitudes de l'auteur. Diverses additions, soit de mots, soit de membres de phrase omis, ont paru nécessaires; elles ont été faites entre crochets d'intercalation < >. Les crochets [] indiquent, au contraire, les passages suspects d'interpolation, genre de corruption auquel les copies n'ont pas échappé par suite des notes qui y ont été ajoutées.

On n'a tenu aucun compte de la ponctuation des *Varia*, qui est aussi défectueuse que possible, ni même de la division en alinéas que comporte cette édition. Les sources manuscrites ont été seulement consultées sous ce rapport. On a cherché avant tout à rendre la lecture facile, en adoptant une ponctuation régulière et conforme à nos habitudes modernes, et en multipliant les alinéas.

Une autre innovation a été introduite dans le même but : la mise à la ligne de tout ce qui est équation ou peut être considéré comme tel. Il est à peine utile de dire que cette disposition typographique n'est pas en général indiquée par les sources; mais nous n'avons eu aucun scrupule à l'adopter, et nous pensons qu'elle pourrait être utilement imitée en général dans les rééditions des anciens auteurs mathématiques.

En ce qui concerne les notations et abréviations, nous avons cherché à déterminer pour chaque opuscule le mode qui semblait avoir été le plus généralement suivi par Fermat, et nous y avons conformé tout ce qui en différait. Il est à remarquer que, dans les anciennes copies et dans les *Varia*,

on n'a attaché aucune importance à l'emploi de notations que Fermat, fidèle aux errements de Viète, a généralement évitées; mais, d'autre part, on ne doit nullement supposer qu'il ait suivi dans tous ses écrits régulièrement le même système d'abréviations. La règle que nous avons adoptée nous a paru concilier ce qui était dû au respect des anciennes notations et à la facilité de la lecture; car, pour celle-ci, il est en tout cas essentiel que l'on ne passe pas brusquement d'un genre d'abréviation à un autre.

Pour l'orthographe latine, nous avons adopté celle qui est encore aujourd'hui la plus usuelle, malgré les dernières tentatives de réforme; tout d'abord nous avons distingué l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v* comme le faisaient déjà les Elzevirs ⁽¹⁾, par exemple dans l'édition de Viète de 1646; puis, pour chaque mot particulier, tout en ayant grand soin de restituer certaines formes que Fermat paraît avoir affectionnées et que les copistes ont d'ordinaire négligées, nous avons adopté l'orthographe la plus usuelle, et seulement pour les cas ambigus, nous avons cherché l'usage le plus fréquent dans les sources relatives à chaque opuscule. Cependant, pour la facilité de la lecture, nous n'avons pas hésité à substituer partout *quum* à *cum*, qui semble pourtant bien avoir été l'orthographe de Fermat.

En tout cas, pour que l'édition nouvelle pût entièrement remplacer les *Varia* dans toute recherche sur ce point, l'orthographe de l'ancienne édition, ainsi que celle des autres sources, a été notée scrupuleusement, en même temps que les corrections, dans les variantes rejetées à la fin du Volume. Ces variantes contiennent également quelques notes critiques et remarques qui complètent les annotations mises au bas des pages du texte.

L'accentuation a été indiquée partout où elle a paru utile pour faciliter la lecture; on a suivi à cet égard le modèle donné par Friedrich Hultsch dans sa traduction de Pappus.


Les pièces qui figurent dans l'Appendice ont été réimprimées sans aucun changement, à part quelques corrections indiquées en notes.

M. Paul Tannery s'est plus spécialement chargé de l'établissement du texte et de la rédaction des notes de ce premier Volume : M. Charles Henry s'est plus particulièrement occupé de recueillir et de collationner les documents.

Sans l'offre gracieuse du prince Baldassare Boncompagni, sans sa singulière complaisance pour nous, la présente édition n'aurait pu être entre-

⁽¹⁾ Le *Diophante* et les *Varia* de Samuel Fermat offrent à cet égard des divergences et des irrégularités; mais en général la distinction n'est pas faite dans le premier de ces ouvrages : elle l'est au contraire dans le second.

prise; le monde savant lui en doit une reconnaissance dont nous ne pouvons être ici que les trop faibles interprètes; nous devons aussi un tribut de remerciements à nombre de personnes qui ont bien voulu nous prêter leur concours et nous fournir divers renseignements; nous avons tout particulièrement à nommer M. Léopold Delisle, administrateur de la Bibliothèque Nationale, qui a facilité nos recherches avec tant de bienveillance; M. Henri Omont, bibliothécaire au département des manuscrits du même établissement, à qui nous devons, entre autres choses, la découverte d'une pièce inédite, imprimée dans l'Appendice; M. Bierens de Haan, M. Antonio Favaro qui dirigent respectivement, l'un à Leyde, l'autre à Padoue, les rééditions des Œuvres de Huygens et de Galilée et qui nous ont assuré leur précieux concours pour des collations que nous ne pouvons faire nous-mêmes; enfin M. de la Ville de Mirmont, de la Faculté de Bordeaux, qui a bien voulu rechercher pour nous la provenance de quelques citations classiques faites par Fermat sans nom d'auteur.



ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES.

APOLLONII PERGÆI

LIBRI DUO DE LOCIS PLANIS RESTITUTI.

< LIBER PRIMUS. >

Loci plani quid sint, notum est satis superque : hac de re scripsisse libros duos Apollonium testatur Pappus ⁽¹⁾, eorumque propositiones singulas initio libri septimi tradit, verbis tamen aut obscuris aut sane interpreti minus perspectis (græcum enim codicem ⁽²⁾ videre non licuit). Hanc scientiam, totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam, ab oblivione vindicamus et Apollonium *de locis planis* disserentem Apolloniis Gallis, Batavis et Hlyricis ⁽³⁾ audacter opponimus, certam

(1) Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones a Federico Commandino Urbinatè in latinum conversæ et commentariis illustratæ. — Pisauri, apud Hieronymum Concordiam, MDLXXXVIII. — (D'autres tirages à Venise *apud Franciscum de Franciscis Senensem*, 1589, et à Pesaro, 1602.)

C'est à cette traduction de Commandin que Fermat a emprunté textuellement les énoncés (ci-après entre guillemets) des propositions qu'il a cherché à restituer. Voir, dans les variantes, la correspondance établie sous la rubrique *Co.*

(2) Le texte grec de la préface du Livre VII de Pappus a été édité pour la première fois, en 1706, par Halley (*Apollonii Pergæi de sectione rationis libri duo ex Arabico MSto latine versi*, etc., Oxford). Mais pour apprécier la valeur de la divination de Fermat, il faut recourir à l'édition complète : *Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus HULTSCH*. Berlin, Weidmann, 1876-1877-1878 (Vol. II, pages 662-669 pour le texte des propositions, et pages 852 à 865 pour les lemmes relatifs aux *Lieux plans* d'Apollonius).

(3) Francisci Vietæ *Apollonius Gallus* seu exsuscitata Apollonii Pergæi περί ἐπιφανῶν Geo-

gerentes fiduciam non alibi præclarius quam hoc in opere, Geometriae miracula elucere. Quod ut statim fatearis, hic exordior.

Propositiones libri primi hæc sunt :

PROPOSITIO I.

« Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel a duobus, et vel in rectam lineam, vel parallele, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spatium : contingat autem terminus unius locum planum positione datum, et alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum quidem ejusdem generis, interdum vero diversum, et interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo. »

Hæc propositio in propositiones octo dividi commode potest, et quævis ex iis in multiplices casus : obscuritatem interpreti præbuisse videtur interpunctionum defectus ; imo et Pappus ipse hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacavisse obscuritate. Singula, dum secamus in oclantes, ita revelamus :

I. PROPOSITIO. — Si a dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur, datam habentes proportionem, et terminus unius contingat locum \langle planum \rangle positione datum (hoc est : aut rectam, aut circumferentiam circuli positione datam), alterius terminus continget rectam aut circuli circumferentiam positione datam.

Esto datum punctum A (fig. 1), per quod agantur in directum rectæ AB, AF, in proportionem data, et sit, verbi gratia, punctum B in

metria. — Ad V. C. Adrianum Romanum Belgam. — Paris, Leclerc, 1600. — (Reproduit pages 325-346 de l'édition des Œuvres de Viète par Schooten, Leyde, Elzévir, 1646.)

Wilebrordi Snellii (Rodolphi) Filii) : *περὶ λόγων ἀποτομῶν καὶ περὶ γωνίῶν ἀποτομῶν* resuscitata Geometria. Leyde, Plantin, 1607. — *Apollonius Batavus* seu exsuscitata Apollonii Pergæi *περὶ ἀποτομῶν καὶ γωνιῶν* Geometria. Leyde, Dorp, 1608.

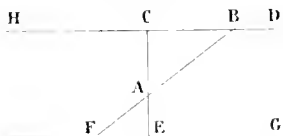
Marini Ghetaldi, Patritii Ragusensis : *Apollonius redivivus* seu restituta Apollonii Pergæi inclinationum Geometria. — Supplementum *Apollonii Galli* seu exsuscitata Apollonii Pergæi tactionum Geometriae pars reliqua. — Venise, 1607.

On peut ajouter le *Supplementum Apollonii redivivi* publié par Alexander Anderson à Paris, en 1612.

recta linea HCBD positione data : Aio punctum F esse quoque ad rectam positione datam.

A puncto A demissà in rectam HD perpendiculari AC, dabitur punctum C. Producat CA ad E, et fiat ratio CA ad AE aequalis datae; dabitur igitur recta AE et punctum E. Per punctum E, parallela rectae HD

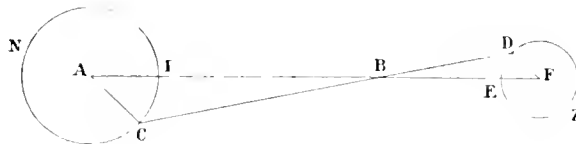
Fig. 1.



ducatur GEF; dabitur positione, et in ea erit punctum F, quia omnes rectae per datum punctum parallelas secantes in eandem rationem dividuntur. Patet ergo quaecumque rectam, per punctum A transcurrentem et datis positione parallelis terminatam, in datam secari proportionem.

Esto deinde datum punctum B (*fig. 2*) et circulus positione ICN,

Fig. 2.



cujus centrum A. Jungatur BA, in puncto I circumferentiam secans, et producat IB ad BE, ut sit ratio IB ad BE aequalis datae. Continuetur in F, et fiat

$$AI \text{ ad } EF \text{ ut } IB \text{ ad } BE,$$

et centro F, intervallo FE, describatur circumferentia circuli EDZ, quam patet, ex constructione, positione dari : Aio rectas omnes, per punctum datum B transeuntes et utrimque circumferentiis datorum positione circulorum terminatas, in datam secari rationem.

Ductà enim, verbi gratia, CBD, jungantur CA, DF; est

$$\text{ut } IB \text{ ad } BE, \text{ ita } AI \text{ ad } EF;$$

ergo

ut tota BA ad BF, ita AI sive AC ad EF sive FD;

et sunt aequales anguli ABC, FBD ad verticem. Patet itaque triangula esse similia, atque ideo

ut CB ad BD, ita BA ad BF, hoc est in ratione data.

Quum igitur a dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ, BC, BD, verbi gratia, in data ratione, quarum BC tangit circumferentiam positione datam, tanget quoque BD aliam circumferentiam positione datam.

Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porro nos minima quæque in demonstrationibus non docere, quum statim pateant, imo et casus diversos non persequi, quum ex adductis minimo possint negotio derivari.

2. PROPOSITIO. — *Si a dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione < datum > ⁽¹⁾, tanget pariter et terminus alterius.*

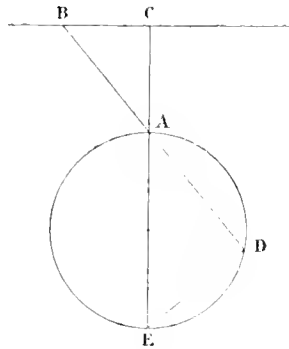
Esto datum punctum A (*fig. 3*), data primum recta BC positione, in quam demittatur perpendicularis AC; dabitur ergo et punctum C. Producat, et fiat spatium dato æquale rectangulum CAE. Super diametro AE descripto circulo ADE, aio rectas omnes, per punctum A ductas et illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas, ita ad punctum A secari ut rectangulum sub partibus æquetur spatium dato.

Nam sit, verbi gratia, recta DAB. Junctâ DE, quum sit angulus ADE in semicirculo rectus, et anguli BAC, DAE ad verticem æquales, erunt

⁽¹⁾ Le mot *datum* a été restitué ici et ailleurs, partout où il a paru improbable que Fermat l'ait consciemment sous-entendu. Mais il faut observer que Pappus dit souvent seulement *ἔστω* et Commandin *positione*, pour signifier *donné de position*; Fermat avait donc pu prendre la même habitude.

triangula DAE, ACB similia, atque ideo rectangulum BAD rectangulo CAE dato aequale.

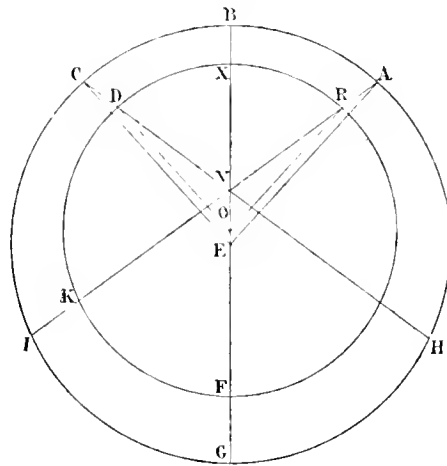
Fig. 3.



Quum igitur per punctum A ducantur duæ rectæ AB, AD in directum, et terminus unius, nempe AB, tangat rectam BC positione datam, tanget et terminus alterius locum planum, hoc est circulum ADE, positione datum.

Sed detur punctum V (*fig. 4*) et circulus BIGH positione, cujus

Fig. 4.



centrum E. Jungatur EV et producat in B; dabitur VB. Producat in F, ut sit rectangulum BVF æquale dato, cui etiam æquetur rectangulum GVX. Super diametro XF, circulus describatur XKF, quem

quidem dari positione patet : Aio rectas, per punctum V transeuntes et duobus cirenlis terminatas, ita secari in V ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant.

Ducatur enim, verbi gratia, AVKI : aio rectangulum AVK æquari dato.

Sumatur centrum circuli minoris O; recta autem AVKI secet eundem circumulum in R; jungantur rectæ RO, AE. Posuimus rectangulum GVX æquari BVF; erit ergo

$$GV \text{ ad } VB \quad \text{ut} \quad FV \text{ ad } VX,$$

et componendo, et sumendo antecedentium dimidia, et per conversionem rationis,

$$\text{ut } EB \text{ sive } EA \text{ ad } EV, \quad \text{ita } OX \text{ sive } OR \text{ ad } OV.$$

Et habent duo triangula OVR, VEA communem angulum EVA; erunt ergo similia, et

$$\text{ut } AV \text{ ad } RV, \quad \text{ita } AE \text{ ad } RO, \quad \text{sive } EB \text{ ad } OX, \quad < \text{et} > \quad VE \text{ ad } VO.$$

Quum ergo

$$\text{ut } EB \text{ ad } OX, \quad \text{ita } VE \text{ ad } VO,$$

ergo

$$\text{ut } EB \text{ ad } OX, \quad \text{ita reliqua } VB \text{ ad reliquam } VX,$$

atque ideo

$$\text{ut } AV \text{ ad } RV, \quad \text{ita } BV \text{ ad } XV.$$

Similiter probabimus

$$\text{ut } GV \text{ ad } VF, \quad \text{ita } IV \text{ ad } KV;$$

erit igitur vicissim

$$\text{ut } GV \text{ ad } VI, \quad \text{ita } FV \text{ ad } VK.$$

Ut autem

$$FV \text{ ad } VK, \quad \text{ita } VR \text{ ad } VX$$

(quia rectangula KVR, FVX in circulo sunt æqualia), et

$$\text{ut } VR \text{ ad } VX, \quad \text{ita probavimus esse } VA \text{ ad } VB;$$

erit igitur

ut FV ad VK , ex una parte, ita VA ad VB .

Rectangulum igitur KVA rectangulo FVB dato aequale.

Ex alia vero parte erit

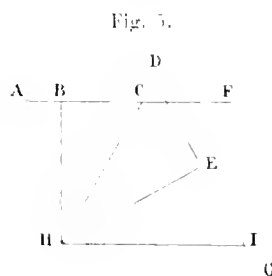
ut GV ad IV , ita VR ad VX ,

atque ideo rectangulum IVR rectangulo GVX dato aequale.

Quum igitur per punctum V ducantur duæ linear in directum AV et VK , comprehendentes spatium datum, et terminus unius, nempe VA , contingat circulum positione datum, tanget et terminus alterius locum planum, hoc est circulum XKF , positione datum.

3. PROPOSITIO. — *Si a dato < puncto > ducantur duæ linear, datum continentibus angulum et datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione < datum >, continget et terminus alterius.*

Esto primo datum punctum H (*fig. 5*) et recta linea AF positione,



in quam demissa perpendicularis HB dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus BHE et sit BH ad HE in ratione data; dabitur recta HE positione, et punctum E . A puncto E ad rectam HE excitata perpendicularis infinita DEG dabitur positione. Sumatur quodlibet punctum in recta AF , ut C , et junctà HC , fiat angulo dato æqualis CHI : Aio rectam HC ad HI esse in ratione data.

Nam, quum sint æquales anguli BHE , CHI , dempto communi CHE ,

et similitudinem triangulorum FAE, CAB; iisdem rationibus, quibus jam in priore propositione ejusque secunda figura uti sumus, arguemus, eritque

$$AF \text{ ad } EA \text{ ut } AC \text{ ad } AB,$$

et vicissim

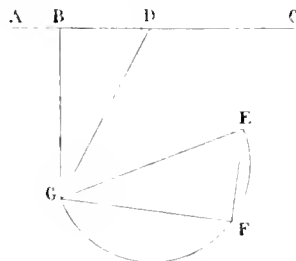
$$\text{ut } AF \text{ ad } AC, \text{ hoc est ut } AM \text{ ad } AD, \text{ ita } AE \text{ ad } AB.$$

Dabitur ergo ratio AE ad AB, et patet tum sensus, tum consequentia propositionis.

4. PROPOSITIO. — *Si a dato puncto ducantur duae lineae, datum continentibus angulum et datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sit datum punctum G (fig. 7), recta positione data AC, in quam

Fig. 7.



ducatur perpendicularis GB; esto angulus datus BGE, et spatium datum sub BG in GE. Super GE describatur semicirculus GEF, et sumpto in recta positione data quovis puncto, ut D, junctâque DG, fiat angulo dato aequalis DGF : Aio rectangulum sub DG in GF aequari dato.

Jungatur FE. Probabimus, ut in propositione praecedente, aequalitatem angulorum BGD, EGF. Sed recti ad B et F sunt aequales; non latebit igitur triangulorum BGD, EGF similitudo, neque rectangulorum BG in GE, et GD in GF aequalitas, neque veritas propositionis.

Si igitur, etc.

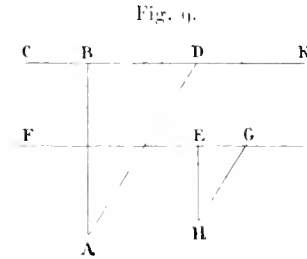
Sed sit datum punctum A (fig. 8), et circulus positione HGE.

Hoc in casu sumpsimus punctum A extra circulum positione datum, in secundo verò casu secundæ propositionis, intra circulum posueramus.

Quatuor propositiones præcedentes punctum unum datum assument, sequentes duo.

5. PROPOSITIO. — *Si a duobus punctis datis duæ lineæ parallelæ agantur, rationem habentes datam, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sunto \angle data \angle duo puncta A et H (fig. 9), recta positione CBDK, in quam demittatur perpendicularis AB, cui parallela ducatur HE, et



sit ratio AB ad HE data. Dabitur punctum E, per quod ductâ FEG perpendiculari ad HE et rectæ positione datæ parallelâ, aio omnes parallelas, a punctis A, H ductas et rectis CD, FG positione datis terminatas, esse in proportionem datam AB ad HE.

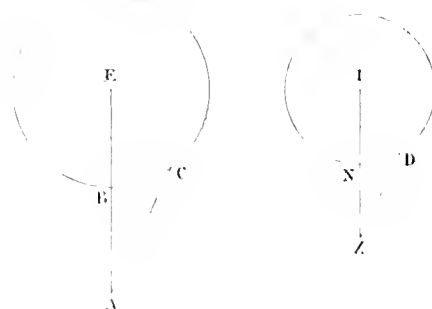
Erunt enim anguli BAD, EHG æquales, et recti ad B et E; similia ergo triangula BAD, EHG, et reliqua facilia.

Quum igitur a datis duobus punctis A et H ductæ fuerint parallelæ AD, HG, in ratione data, quarum AD est ad datam rectam positionem, erit et HG ad rectam positionem datam, ideoque ad locum planum.

In hac figura (fig. 10) sint data puncta A et Z, et circulus positione BC, cujus centrum E. Iungatur AE, occurrens circulo in B, et huic parallela ducatur ZN, fiatque ratio AB ad ZN æqualis datæ. Producat ZN in I, et fiat ratio BE ad NI æqualis etiam datæ. Centro I, intervallo IN, descriptus circulus dabitur positione et questionis satisfaciet.

Nam, ductis parallelis AC, ZD, circulis ad puncta C, D occurrentibus, erit ratio AC ad ZD aequalis datae; esse enim angulos BAC, NZD

Fig. 10.

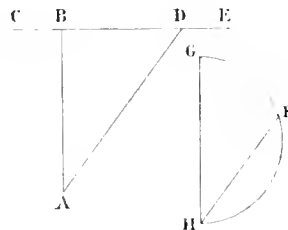


aequales, jam primus hujus propositionis casus evicit; reliquum praestabit secundum < tertiae > propositionis epitagma.

6. PROPOSITIO. — *Si a duobus punctis datis duae parallelae agantur, datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sint data duo puncta A et H (fig. 11), recta positione CE, in quam < demittatur > perpendicularis AB, cui parallela ducatur HG, et

Fig. 11.



rectangulo dato sit aequale rectangulum sub AB < in > ⁽¹⁾ HG; dabitur recta HG, super qua descriptus semicirculus ⁽²⁾ HFG questionem perficiet.

¹⁾ La locution abrégée « sub AB. HG » se trouve déjà chez Viète.

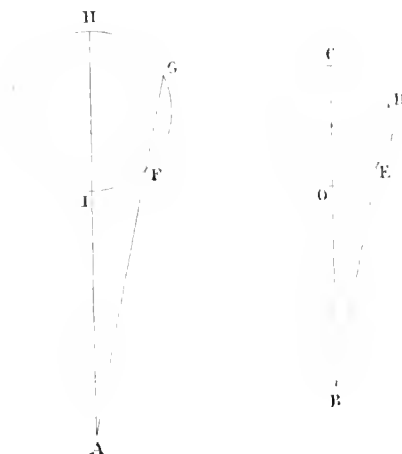
²⁾ Voir la Note de la page 12.

Ductis enim ubicumque parallelis AD, HF, et junctâ GF, patebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum BAD, GHF similitudo, ideoque rectangulum sub AD in HF æquale dato sub BA in HG concludetur.

Quum igitur a duobus punctis, etc.

In secundo casu, sint data puncta A et B (fig. 12), et circulus positione IFGH, per ejus centrum transeat AHI, cui parallela ducatur BC.

Fig. 12.



et sit rectangulum sub AI \times in \times BC æquale dato, eidemque æquale rectangulum sub AH in BO. Super recta OC descriptus semicirculus præstat propositum.

Nam, ductis parallelis AFG, BED, erunt anguli HAG, CBD æquales, et rectangulum sub AG in BE æquale dato, eidemque rectangulum sub AF in BD; nec absimilis est ei, quæ in secundo epitagmate propositionis quartæ prodita est, demonstratio.

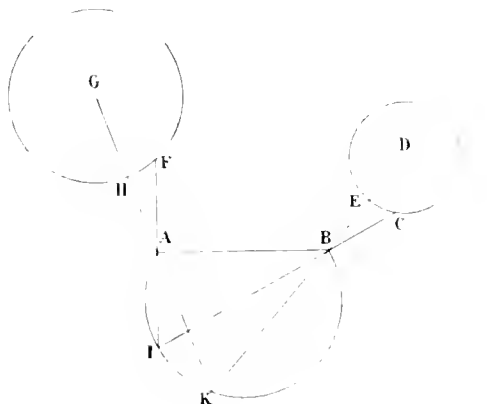
7. PROPOSITIO. — *Si duæ lineæ agantur a datis duobus punctis, datum continentes angulum et datam habentes proportionem, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sunto \times data \times duo puncta A et B (fig. 13), recta positione IGH.

propositi non est laboriosum; statimque patet AF ad BC esse in ratione data, imo et ad circumferentias concavas productas idem præstare.

Quum igitur, etc.

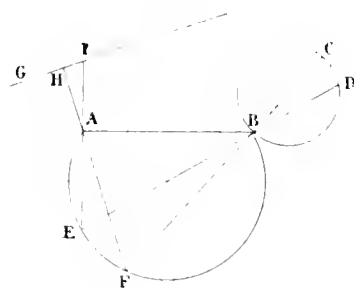
Fig. 14.



8. PROPOSITIO. — *Si a duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentés angulum et datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sint data duo puncta A et B (fig. 15), recta positione GI. Super AB describatur portio circuli capiens angulum datum. Ducta perpendicu-

Fig. 15.



laris AH in GI continuetur in F, et juncta FB producatur in C, sitque spatium datum AH in BC. Super recta BC descriptus circulus faciet quod proponitur.

sit ad rectam, est quoque ad rectam posterior, si ad circumulum, similiter ad circumulum; in secundæ vero priore parte et aliis quibusdam casibus, est diversi generis.

Addit deinde aliquando *similiter* poni *ad rectam lineam, interdum contrario modo*. Quo loco verba « *ad rectam lineam* » (¹), quæ nullum sensum admittunt, censeo delenda, et ita locum interpreter, ut aliquando secundus locus priori contrario modo ponatur: verbi gratia, si prior sit ad convexum circuli, secundus ad concavum, etc., ejus rei exempla priores propositiones suppeditabunt.

PROPOSITIO II.

« *Si rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, et alter circum-*
» *ferentiam concavam positione datam continget.* »

Hæc verba si ita legantur, falsa est propositio (²); reponendum igitur loco, verbi gratia, « *positione datæ* » — *magnitudine datæ*; — eritque sensus ut, *datâ circuli diametro et centro, extremitas diametri sit ad circumulum positione datum*. Cujus rei veritas quum per se pateat, cur diutius hic inmoremur?

PROPOSITIO III.

« *Si a duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum*
» *continentes, commune ipsorum punctum continget circumferentiam*
» *concavam positione datam.* »

Hæc propositio per se patet: dari enim, super recta linea duo puncta jungente, portionem circuli capientem angulum datum, docuit Euclides in *Elementis*.

PROPOSITIO IV.

« *Si trianguli spatii, magnitudine dati, basis positione et magnitudine*
» *data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget* », paral-

(¹) Les mots du texte grec $\pi\rho\acute{o}\varsigma \tau\eta\gamma \varepsilon\theta\acute{\epsilon}\tau\alpha\gamma$ (Hultsch, p. 664, l. 5) peuvent être conservés avec l'explication donnée par Fermat.

(²) Fermat a deviné le texte grec (Hultsch, p. 664, l. 10). Cette proposition et les deux suivantes ne sont pas d'Apollonius: Pappus les donne comme ajoutées par Charmandre.

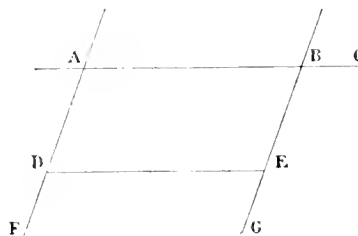
lelam nempe basi datæ, ejus inventione ex I *Elementorum* facile deduces omnia.

PROPOSITIO V.

« *Si rectæ lineæ, magnitudine datæ et cuipiam positioni datæ æquidistantis, unus terminus contingat rectam lineam positione datam,*
 » *et alius terminus rectam lineam positione datam continget.* »

Datæ rectæ lineæ DE (*fig. 17*) magnitudine et rectæ AC, positione datæ, æquidistantis unus terminus, ut D, contingat rectam AF posi-

Fig. 17.



tionem datam. Si per punctum E duxeris BEG ipsi AF parallelam, constabit propositum.

Erunt quippe rectæ omnes, inter has duas parallelas interceptæ et rectæ AC, positione datæ, æquidistantes, inter se æquales : quod ipsa constructio manifestat.

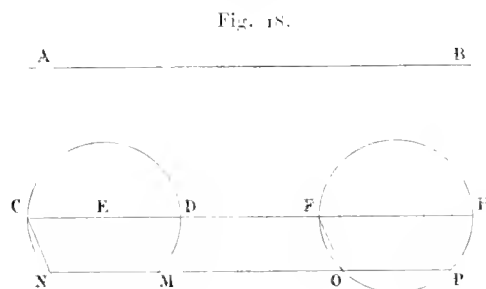
Si igitur alter terminus enjusslibet sit ad rectam AF, erit alius ad BG, ut vult propositio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

Sit enim data AB (*fig. 18*) positione, cui æquidistet recta NO magnitudine data, ejus punctum N sit ad circumferentiam circuli CNM positione dati : Nō punctum O esse ad circumulum positione datum.

Esto E centrum circuli CNM, et ducta diameter, ipsi NO parallela, continuetur in F, donec recta CF æquetur NO datæ : dabitur recta CF positione et magnitudine. Producat, et fiat FH æqualis CD. Super FH descriptus circulus præstabit propositum.

Erit quippe punctum O ad ipsius circumferentiam. Quum enim

punctum O sit ad circumferentiam circuli FOP, erunt rectæ CN, FO æquales et parallelæ, quum æquales et parallelas CF, NO conjungant. Erunt igitur anguli XCD, OFH æquales; quod quidem ita se habet,



quum rectæ CD, FH sint æquales, et a rectis NM, OP æqualiter distent.

Poterit igitur propositio Pappi universaliter ita concipi :

Si rectæ lineæ, magnitudine datæ et cuipiam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat locum planum positione datum, et alius terminus locum planum positione datum continget.

PROPOSITIO VI.

« Si a puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas,
 » vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam
 » habentes proportionem vel quarum una simul cum ea, ad quam altera
 » proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam
 » lineam positione datam. »

Hujus propositionis duæ sunt partes, quarum prior hæc est.

Sint duæ rectæ positione datæ AE, AF (*fig. 19*), in puncto A concurrentes, et a puncto C demittantur rectæ CB, CD, in datis angulis CBA, CDA, et sint rectæ BC, CD in data proportionem : Aio punctum C esse ad rectam lineam positione datam.

Iungantur AC, BD. In quadrangulo ABCD dantur tres anguli ABC, ADC, BAD : datur igitur angulus BCD. Datur etiam ratio BC ad CD ex hypothesi : ergo datur specie triangulum BDC et anguli CBD, CDB.

laris IBM : dabitur IB. Fiat

ut AN ad NC, ita IB ad BM.

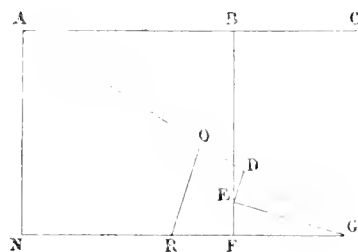
Per punctum M ducta duabus datis parallela satisfaciet questioni,
nec est operosa demonstratio.

Si igitur a puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas, parallelas vel inter se convenientes, ducantur rectæ lineæ *< in >* datis angulis, habentes datam proportionem, continget punctum rectam lineam positione datam.

Secunda pars ita se habet :

Dentur rectae AC , AG (*fig. 21*), in puncto A concurrentes. Ponatur

Fig. 21



AN super rectam AC in dato angulo CAN. Fiat AN æqualis datæ, et ipsi AC parallela ducatur NG. Angulus alius datus sit ROG. Per primam partem hujus ducatur recta GE, in qua sumpto quovis puncto, ut E, rectæ ED, EF, ipsis RO, AN parallelae, sint in ratione data : dabitur GE positione, ex superius demonstratis. Producaturs FE in B : dabitur FB magnitudine; est enim æqualis datæ AN, propter parallelas.

Quodcumque igitur punctum sumpseris in recta GE, ut E, a quo in rectas AC, AG demiseris rectas ED, EB in angulis datis, recta BE una cum EF, ad quam ED habet rationem datam, data erit : quod vult propositio (4).

Si igitur a puncto quodam ad positione \angle datas \angle duas rectas lineas, inter se convenientes, ducantur rectae lineae in datis angulis, quarum

(¹) Fermat omet ici le cas du parallélisme des droites données AC, AG.

una simul cum ea, ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam.

PROPOSITIO VII.

« Si sint quocumque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas a quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod data lineæ et ducta continetur, unâ cum contento data lineæ et altera ducta, æquale ei quod data et alia ducta et reliquis ⁽¹⁾ continetur, punctum rectam lineam positione datam continget. »

Cette proposition est ampliation de la précédente et quod de duabus lineis est superius demonstratum in prima parte propositionis VI, hic in quocumque locum habere proponitur.

Exponentur tres rectæ positione datæ et triangulum constituentes AB, BC, CA (*fig.* 22). Est inveniendæ recta, EK verbi gratia, in qua sumendo quodlibet punctum, ut M, et ab eo ducendo rectas MR, MO, MI in angulis datis MRA, MOB, MIA, summa duarum OM et MI sit ad MR in ratione datæ.

Per primam partem propositionis præcedentis inveniatur recta in qua sumendo quodlibet punctum et ab eo ducendo rectas ad rectas AB,

(1) Ces deux mots *et reliquis* de la version de Commandin sont incompréhensibles; Hultsch traduit le grec $\kappa\alpha\iota\ \tau\omicron\upsilon\varsigma\ \lambda\omicron\gamma\iota\tau\epsilon\omicron\varsigma\ \epsilon\lambda\lambda\omicron\gamma\iota\varsigma$ (p. 666, l. 5) par *et sic in ceteris*, ce qui concorde assez avec la divination de Fermat. Mais le sens probable est plus vague et ne permet guère de préciser à quel point s'étaient arrêtées les recherches d'Apollonius.

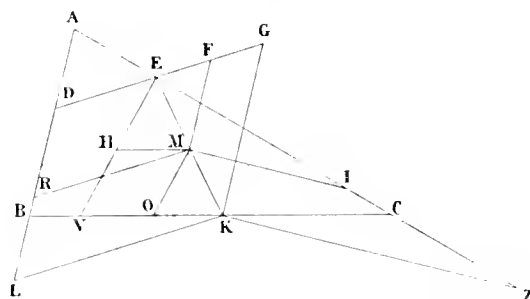
La généralisation véritable de la proposition VI est évidemment que le lieu du point est une droite toutes les fois qu'il y a une relation linéaire *quelconque* entre les distances (obliques) de ce point à des droites données en nombre quelconque. On peut donner ce sens à la proposition VII du texte de Pappus; mais, à entendre ce texte littéralement, il semble que, d'une part, dans cette relation linéaire, il ne supposait pas de terme constant; que, de l'autre, il égalait la somme de deux des termes à la somme de tous les autres. Fermat a bien fait la première hypothèse; mais, au lieu de la seconde, il a supposé un terme égal à la somme de tous les autres.

Dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*, Fermat remarque la possibilité de généraliser la proposition de Pappus, telle qu'il l'a restituée; cette généralisation doit, sans doute, correspondre à l'hypothèse qui égale la somme d'un nombre quelconque de termes à la somme de tous les autres, mais toujours en ne supposant pas de terme constant.

Puis, au même endroit, Fermat égale, au contraire, à un terme constant la somme de tous les termes variables; mais il ne paraît pas avoir conçu la relation linéaire sous sa forme la plus générale.

BC, ductæ sint in ratione data : dabitur positione recta quesita. Punctum igitur, in quo concurret cum AC, dabitur : esto E, a quo ducantur EV, ED ipsis MO, MR parallelæ; ergo ex constructione VE ad ED habebit rationem datam. Eadem methodo, sumptis AB, AC rectis, inveniatur punctum K, a quo ductæ KL, KZ in datis angulis, ipsis nempe MR, MI parallelæ, sint in ratione data. Erit igitur similiter KZ ad KL in

Fig. 24.



ratione data. Iungatur EK : quodcumque punctum in ea sumpseris præstabit propositum.

Sumatur M, verbi gratia, ex jam constructis. Fiat MF parallelæ BA, et MH parallelæ BC. Probandum est summam duarum OM, MI esse ad MR ut VE ad ED, in ratione nempe data.

Fiat adhuc KG parallelæ BA. Ponatur verum esse quod intendimus probare : ergo vicissim erit

ut MR ad ED, ita summa duarum MI, MO ad EV,

et, dividendo, erit

ut differentia MR et DE ad DE,

ita differentia qua due OM, MI superant EV ad EV.

Quum autem MF sit parallelæ BA, EF erit differentia rectarum MB et DE, et quum MH sit parallelæ BC, EH erit differentia rectarum VE, MO, ideoque differentia rectarum IM et EH æquabitur excessui quo due MO, MI superant rectam VE. Ex demonstratis igitur erit

EF ad DE ut differentia rectarum IM, EH ad EV,

et vicissim

$$EF \text{ erit ad differentiam rectarum } IM, EH \text{ ut } ED \text{ ad } EV.$$

Erit igitur, convertendo,

$$\text{differentia rectarum } IM, EH \text{ ad } EF \text{ in ratione data } EV \text{ ad } ED.$$

Ex constructione autem, expositis tribus EH, EF, MI , est

$$VE \text{ ad } EH \text{ ut } KE \text{ ad } EM;$$

est etiam

$$KZ \text{ ad } MI \text{ in eadem ratione } KE \text{ ad } EM;$$

est etiam, quum KG sit parallela BA ,

$$GE \text{ ad } EF \text{ in eadem ratione } KE \text{ ad } EM.$$

Igitur tres rectæ VE, KZ, EG sunt in ratione trium HE, MI, EF : est igitur

$$\text{ut differentia duarum } EV, KZ \text{ ad } EG, \text{ ita differentia duarum } MI, EH \text{ ad } EF.$$

Sed probavimus differentiam duarum MI, EH ad EF habere rationem datam EV ad ED : igitur differentia duarum EV, KZ ad EG habebit rationem datam EV ad ED , et vicissim

$$\text{differentia duarum } EV, KZ \text{ ad } EV \text{ erit ut } EG \text{ ad } ED,$$

et, componendo,

$$KZ \text{ erit ad } EV \text{ ut } GD \text{ ad } ED.$$

Sed (propter parallelas KG, BA) KL æquatur DG : igitur vicissim erit

$$\text{ut } KZ \text{ ad } KL, \text{ ita } EV \text{ ad } ED,$$

quod quidem ita se habere jam ex ipsa constructione innotuerat.

Constat itaque veritas pulcherrimæ propositionis, nec est difficilis aut absimilis ad ultteriores casus et quolibet lineas porrigenda constructio et demonstratio. Semper enim, beneficio constructionis in duabus lineis, expeditur problema in tribus lineis : beneficio constructionis in tribus lineis, expeditur problema in quatuor lineis :

beneficio constructionis in quatuor, expeditur problema in quinque :
et simili omnino ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII ET ULTIMA.

« Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ
» in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas.
» vel proportionem habentes, vel spatium continentes datum, vel ita ut
» species ab ipsis ductis, vel excessus specierum æqualis sit spatio dato,
» punctum continget positione datas rectas lineas. »

Hujus propositionis, si vera esset, quatuor essent partes, sed eam in
ratione data veram duntaxat ⁽¹⁾ deprehendimus. Valeant igitur reliqua
de spatio contento sub duabus, et de summa aut differentia quadrato-
rum ab ipsis, et tanquam commentitia aut huc aliunde translata reji-
ciantur.

Proponatur itaque sic emendatum theorema :

*Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ
in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas pro-
portionem habentes datam, punctum continget positione datam rectam
lineam.*

Constructio sic procedet : Sint datæ parallelæ AB, GC (*fig. 23*),
puncta in ipsis data A et F, angulus unus ex datis BAH, alter GFH.
Quum puncta A et F dentur, et anguli ad ipsa, dabuntur rectæ AH,
FH positione, ideoque punctum concursus H; dabitur etiam punc-

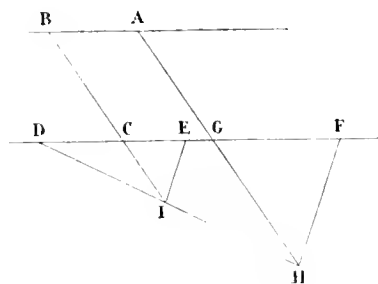
(1) La traduction de Commandin était trop peu intelligible pour que Fermat ait pu reconnaître le véritable sens du texte de Pappus (Hultsch, p. 666, l. 7 à 13); il lui aurait fallu entendre les mots *vel spatium continentes datum, vel ita ut species ab ipsis ductis, vel excessus specierum æqualis sit spatio dato* comme se rapportant non pas aux *rectas lineas*, c'est-à-dire aux abscisses AB, EF, mais bien aux *rectæ lineæ* IB, IE.

Avec l'interprétation de Fermat, pour les trois hypothèses où l'on suppose constant : soit $AB \propto EF$, soit $\overline{AB}^2 + \overline{EF}^2$, soit $\overline{EF}^2 - \overline{AB}^2$, le lieu du point I est évidemment une conique (hyperbole ou ellipse), ainsi que, du reste, Fermat l'a indiqué dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*.

Avec le sens qu'il faut donner au texte de Pappus, que $IB < IE$, ou $\overline{IB}^2 - \overline{IE}^2$, ou $\overline{IB}^2 - \overline{IE}^2$ soit constant, le lieu est évidemment une parallèle aux droites données AB, GC.

tum G, in quo AH secat parallelam GC. Recta GF in puncto D ita secetur ut GD ad DF sit in ratione data : dabitur punctum D. Jungatur DH; dabitur igitur positio DH : Aio rectam DH præstare propositum, hoc est : sumpto in ea quolibet puncto, ut I, et ab eo ductis IB, IE in angulis datis, abscissam AB ad datum punctum A ad abscissam EF ad datum punctum F esse in ratione data GD ad DF.

Fig. 23.



Secet BI parallelam GF in C. Erit ex constructione IB parallela HA, quum fuerit demissa in angulo dato, hoc est, ipsi HAB æquali. Erit etiam IE parallela HF : GC igitur, propter parallelas, æquatur AB. Probandum superest.

ut GC ad EF, ita GD ad DF,

et vicissim

ut GC ad GD, ita EF ad DF.

Hoc autem perspicuum est :

ut enim IH ad HD, ita GC ad GD,

et

ut eadem IH ad HD, ita EF ad FD.

Esse igitur GC ad EF in ratione data fit perspicuum.

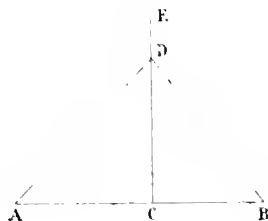
Sunt plures casus tam istius quam precedentium propositionum : quos invenire et addere quum sit facile, cur in his diutius immoremur?

LIBER SECUNDUS ⁽¹⁾.PROPOSITIO I ⁽²⁾.

« Si a datis punctis rectæ lineæ inflectantur, et sint quæ ab ipsis fiunt
 » dato spatio differentia, punctum positione datas rectas lineas con-
 » tinget. »

Sint data duo puncta A et B (fig. 24), et sit datum quodlibet spatium quadrato AB minus. Dividatur AB in C, ita ut quadratum AC qua-

Fig. 24.



dratum CB superet dato spatio, et educatur perpendicularis infinita CE.

(¹) Il semble que Fermat ait composé ce second Livre avant le premier, et même assez longtemps avant (voir *Lettre à Roberval*, du 20 avril 1637). C'est ce qui peut expliquer pourquoi, dans l'édition des *Varia*, on trouve, avant *Liber II*, un titre spécial : *Apollonii Pergæi propositiones de locis planis restitutæ*.

Et en effet, pour l'intelligence du texte obscur où Pappus résume l'objet du Traité d'Apollonius, Fermat devait naturellement chercher à s'aider des lemmes, au nombre de huit (propositions 119 à 126 de la version, par Commandin, du Livre VII), donnés comme relatifs aux *Lieux plans*; or ces lemmes concernent exclusivement le second Livre d'Apollonius.

(²) Aux indications que portent les lemmes de Pappus, on reconnaît que le résumé qu'il donne ne suit pas exactement l'ordre d'Apollonius; ainsi cette proposition I devait faire partie du second lieu du Livre II. Mais Fermat ne s'est aucunement proposé de restituer dans sa forme l'œuvre du géomètre de Pergé, et, en cela, le but de sa divination diffère de l'objet des travaux plus récents, comme celui de Robert Simson (Glasgow, 1719).

in qua sumatur quodlibet punctum D, et jungantur DA, BD : Aio quadratum AD superare quadratum DB dato.

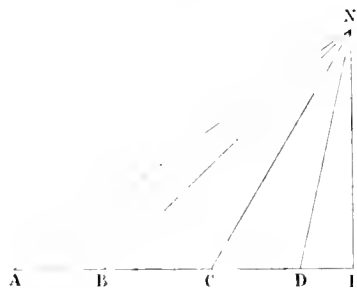
Quod quidem patet, quum quadratum AD eodem superet quadratum DB, quo quadratum AC superat quadratum CB (¹).

Si spatium datum sit majus quadrato AB, punctum C extra lineam AB cadet.

Ad hanc propositionem pertinere possunt due sequentes (²) :

Sint data quatuor puncta A, B, C, D (fig. 25) in recta linea, et sit AB æqualis CD. Sumatur aliud quodcumque punctum, ut N, et jungantur

Fig. 25.



quatuor rectæ NA, NB, NC, ND : Aio duo quadrata AN, ND superare duo quadrata BN, NC rectangulo sub AB in BD bis.

Nam ducatur perpendicularis NI, et primum punctum I extra rectam lineam AD cadat. Patet igitur excessum quadratorum AN, ND super duo quadrata BN, NC, propter omnibus commune quadratum NI, esse id quo duo quadrata AI, DI superant duo quadrata BI, CI. Sed quadrata duo AI, DI, per 3^{am} II, æquantur quadrato DI bis, quadrato AD, et rectangulo ADI bis; quadrata vero BI, CI, per eandem propositionem, æquantur quadrato DI bis, quadratis BD, CD, et rectangulis sub BD in DI bis, et CD in DI bis, sive, loco horum duorum

¹) C'est l'objet du second lemme de Pappus (prop. 120 de Commandin).

²) Dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*, Fermat indique la généralisation des six premières propositions du Livre II de *Locis planis*, pour un nombre quelconque de points donnés choisis sans aucune condition.

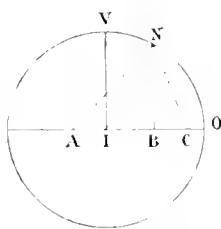
rectangulorum, uni rectangulo AD in BI bis, propterea quod AB est equalis CD : excessus igitur quadratorum AI, ID super BI, CI est idem qui AD quadrati super quadrata BD, CD sive AB. Sed, per 4^{am} propositionem II, quadratum AD duo quadrata AB, BD superat rectangulo sub AB in BD bis. Constat ergo propositum.

Reliquos casus non adjungo neque in hac propositione neque in sequentibus, nam, licet sit facile, esset tædiosum.

Si a tribus punctis in recta linea constitutis inflectantur rectæ, et sint duo quadrata tertio majora spatio dato, punctum positione datam circumferentiam continget.

Sint data tria puncta A, B, C (fig. 26) in recta linea, et datum quod-

Fig. 26.



libet spatium rectangulo ABC bis majus. Fiat AI equalis BC, et spatium datum sit æquale rectangulo ABC bis et quadrato IV. Centro I, intervallo IV, circulus VNO describatur in ejus circumferentia punctum quodlibet sumatur, ut N, junganturque NA, NB, NC ad data puncta : Aio duo quadrata AN, NC quadratum NB dato spatio superare.

Nam jungatur IN : ergo ex superiore propositione patet duo quadrata AN, NC æquari duobus quadratis IN, BN et rectangulo ABC bis : ergo duo quadrata AN, NC superant quadratum NB quadrato IN et rectangulo ABC bis, et constat propositum.

PROPOSITIO II.

« Si a duobus punctis inflectantur rectæ, et sint in proportionem data.
» punctum continget vel rectam, lineam vel circumferentiam. »

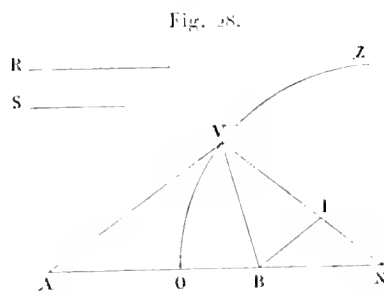
Sint data duo puncta A et C (*fig. 27*), et sit primum data ratio æqualitatis. Dividatur AC bifariam in B, et excitetur perpendicularis BD. Patet quodcumque punctum in ipsa sumatur, ut D, fore rectas AD, DC æquales.



Sed sit data ratio inæqualitatis, et sint duo data puncta A, B (*fig. 28*), ratio ut R ad S. Fiat

ut R quad. ad S quad., ita AN ad NB.

Inter AN, NB sumatur media NO, ejus intervallo describatur circulus OVZ, et in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum, ut V, junganturque VA, VB : Aio esse in data ratione R ad S.



Nam, junctâ VN, ipsi VA parallela sit BI :

ut AN ad NO sive NV, < ita NV > ad NB,

et sunt circa eundem angulum ANV; similia igitur duo triângula ANV, BVN, et angulus VAB angulo BVI æqualis. Sed et AVB, VBI, propter parallelas, æquales sunt; ergo similia triângula AVB, VBI, et est

AV ad VB ut VB ad BI,

et

ut VB ad BI. < ita NV ad NB. et AN ad NV.

Est igitur

ut VB quad. ad BI quad. >, id est AN ad NB ⁽¹⁾,

id est R quad. ad S quad., ita AV quad. ad VB quad.

Est ergo

AV ad VB = ut R ad S,

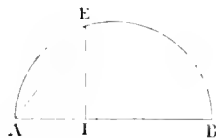
et patet propositum.

PROPOSITIO III.

« Si sit positione data recta linea, et in ipsa datum punctum, a quo
» ducatur quædam linea terminata, a termino autem ipsius ducatur et ad
» positionem ⁽²⁾, et sit quod fit a ducta æquale ei, quod a data, et ab-
» scissa, vel et ad punctum datum, vel ad alterum datum in linea data
» positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam contineat. »

Sit data recta AB (fig. 29) positione, et in ipsa datum punctum A. Oportet invenire circuli circumferentiam in qua sumendo quodlibet

Fig. 29.



punctum, ut E, et demittendo perpendicularem EI, quadratum AE sit æquale rectangulo sub data qualibet recta et AI (per quam debemus intelligere in hac propositione *abscissam ad datum punctum*).

Sit recta data AB. Super AB describatur semicirculus; patet, ex constructione, AB in AI æquari quadrato AE.

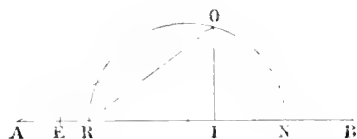
Sed alius casus est difficilior quando videlicet recta abscinditur ad aliud punctum quam A, ut in hoc exemplo.

⁽¹⁾ C'est la réciproque qui est démontrée dans le premier lemme de Pappus (prop. 119), concernant le premier lieu d'Apollonius.

⁽²⁾ Fermat a deviné le sens de ces mots intelligibles : il faudrait « *ducatur perpendicularis ad positione datam* ».

nienda circuli circumferentia, ut NOR, ita ut, sumendo quodlibet in ipsa punctum, ut O, et demittendo OL perpendicularem, quadratum AO sit aequale rectangulo sub BA in EL.

Fig. 34.



Rectangulum BAE ad rectam BA applicetur deficiens figura quadrata in R, et ipsi AR fiat aequalis BN. Super RN descriptus semicirculus præstabit propositum.

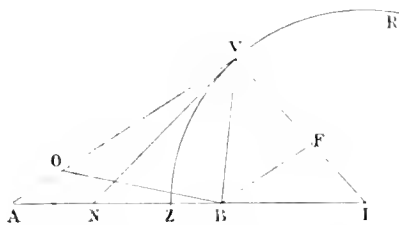
Demonstratio vero non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITION IV.

« Si a duobus punctis datis recte lineæ inflectantur, et sit quod ab una
» efficitur eo, quod ab altera, dato majus quam in proportione, punctum
» positione datam circumferentiam continget. »

Sint duo puncta A et B (fig. 32), ratio data AI ad BI, spatium datum BAN (°). Inter AI et BI media sit IZ (°), ejus intervallo descri-

Fig. 34.



batur circulus ZVR, in quo sumatur quodlibet punctum, ut V, et jungantur VA, VB : Aio quadratum AV quadrato VB majus esse quam in proportionem data, IA ad BI, spatio dato BAN.

(¹) Le troisième lemme de Pappus (prop. 121), relatif au second lieu, a pour effet de démontrer que AN doit être plus petit que AL.

(²) Les lemmes 5 et 6 de Pappus (prop. 123 et 124) ont pour objet de prouver que le point Z et son symétrique par rapport au centre I appartiennent au lieu cherché.

Nam fiat ipsi aequale rectangulum VAO, et jungantur OB, NV, VI, et ipsi AV parallela BF. Probandum est rectangulum AVO ad quadratum VB esse ut AI ad IB.

Est

$$\text{ut AI ad IZ id est VI, ita VI ad IB,}$$

et sunt circa eundem angulum; ergo duo triangula XIV, VBI sunt similia, et angulus VNB angulo BVF æqualis. Sed angulus VNB angulo VOB est æqualis in eadem sectione, quum quatuor puncta N, B, V, O sint in circulo, propter æqualia rectangula BAX, VAO; ergo angulus VOB angulo BVF est æqualis. Sed et angulus OVB angulo VBF, propter parallelas; ergo duo triangula OBV, BVF sunt similia, et

$$\text{ut OV ad BV, ita VB ad BF.}$$

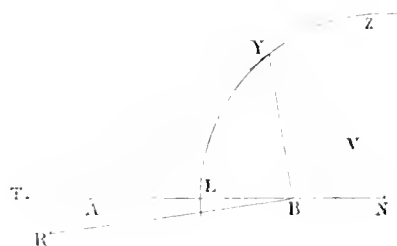
Addatur utrinque communis ratio AV ad VB; ergo ratio composita ex AV ad VB et ex VB ad BF, hoc est ratio AV ad BF, id est AI ad IB, erit eadem rationi < compositæ ex > AV ad VB et OV ad VB, hoc est rectanguli AVO ad quadratum VB. Quod demonstrare oportebat.

Videtur Pappus omisisse hoc loco propositionem huic similem quæ ita se habet :

Si a duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, et sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera, dato minus quam in proportionē, punctum positione datam circumferentiam continget.

Sint data duo puncta A et B (*fig.* 33), ratio AN ad NB, spatium BAT.

Fig. 33.



Inter TN, NB esto media NL, ejus intervallo describatur circuli cir-

cumferentia LYZ, in qua sumpto quolibet puncto Y, jungantur YA, YB : Aio quadratum YA, una cum rectangulo BAT dato, ad quadratum YB esse ut AN ad NB.

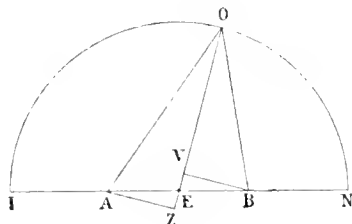
Nam fiat YAR æquale BAT, et jungantur TY, RB, YN, et ipsi AY parallela BV. Propter BAT, YAR æqualia rectangula, probabitur angulus YTB angulo YRB æqualis, et reliqua ut in superiore demonstratione.

PROPOSITIO V.

« Si a quocunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ
» lineæ, et sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punctum
» tum continget positione datam circumferentiam. »

Sint data duo primum puncta A, B (fig. 34), quæ per rectam AB conjungantur. Bifariam scindatur in E; centro E, intervallo quocunque,

Fig. 34.



ut EI, circulus describatur, ut ION : Dico, quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris, ut O, evenire ut quadrata AO, OB simul quadratorum IE, AE sint dupla ⁽¹⁾.

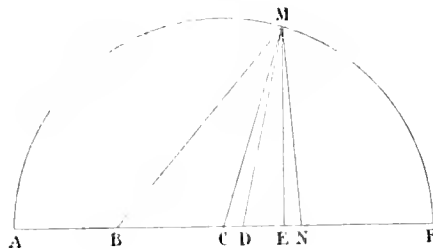
Nam, junctâ rectâ EO, in ipsam, BV, AZ perpendiculares demittantur. In triangulo AEO quadratum AO æquatur quadratis AE, EO et rectangulo OEZ bis; in triangulo OEB quadrata OE, EB æquantur quadrato OB, et rectangulo OEV bis sive OEZ bis (quum EV sit æqualis EZ, propter æquales AE, EB) : ergo, jungendo æqualia æqualibus, quadrata AO, OB et rectangulum OEZ bis æquantur quadratis AE, EB (sive qua-

(1) C'est le quatrième lemme de Pappus (prop. 122), sur le troisième lieu d'Apollonius : la démonstration de Fermat est différente.

drato EA bis), et quadrato EO bis (id est quadrato IE bis), una cum rectangulo OEZ bis. Auferatur utrimque OEZ bis; supererit verum quod asserebamus, et constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E (*fig. 35*) in recta linea, et sit recta BD rectâ DE major; differentiae inter BD et DE sit tertia pars CD. Centro C,

Fig. 35.



intervallo quocumque, ut CA, describatur semicirculus AMF : Aio quodecumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris, ut M, eandem semper fore summam trium quadratorum MB, MD, ME.

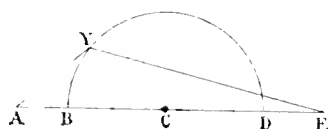
Nam jungantur MB, MC, MD, ME; ipsi vero CD fiat æqualis EN, et jungatur MN. Quum BD superet DE triplâ CD sive triplâ EN, ergo DN, una cum dupla CD, æquabitur BD; et CN, una cum CD, æquabitur BD. Auferatur utrimque CD; ergo CN æquabitur BC. Quum CD sit æqualis EN, per secundam hujus Libelli propositionem ⁽¹⁾, idem erit semper excessus quadratorum CM, MN super duo quadrata DM, ME. Sed CM quadratum est semper idem : ergo duo quadrata DM, ME semper vel quadrato MN æqualia erunt vel in idem excedent vel in idem deficient. Addatur utrimque quadratum MB : ergo tria quadrata MB, MD, ME duobus quadratis BM, MN vel semper æqualia erunt vel in idem excedent vel in idem deficient. Sed BM, MN quadrata idem semper conflant spatium, ex superiori propositione, propter æqualitatem rectarum BC, CN : ergo quadrata BM, DM, EM idem semper spatium conficiunt. Quod erat demonstrandum.

⁽¹⁾ Fermat désigne ainsi sa proposition (p. 30, *fig. 25*), comme s'il avait fait un numérotage en dehors de celui des propositions de Pappus.

Demonstratio generalis ejusdem propositionis. — Exponentur primo duo puncta A et E (*fig.* 36), jungatur AE et bifariam dividatur in C; planum datum sit Z, quod necessario debet esse non minus quadratis duobus AC, CE, ut patet.

Si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C tantum proposito satisfaciet, nec erit aliud punctum a quo junctarum ad puncta A, E quadrata simul sumpta æquentur Z plano.

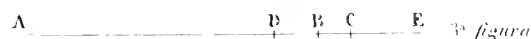
Fig. 36.



Si sit majus duobus quadratis AC, CE, excessus dimidium æquetur quadrato CB. Centro C, intervallo CB, descriptus circulus satisfaciet proposito. Quod, tanquam a Pappo ⁽¹⁾ demonstratum et ab aliis et proclive nimis, omittemus, ne in facilibus diutius immoremur.

LEMMA AD GENERALEM METHODUM. — Exponentur in 1^a, 2^a et 3^a figura quotlibet puncta data A, B, C, E (*fig.* 37), et pro numero punctorum

Fig. 37.



sumatur rectarum, puncto A et reliquis datis terminatarum, pars conditionaria AD, quadrans nempe in hoc exemplo. Sit igitur AD pars quarta rectarum AB, AC, AE; puncti D diversa est positio prout variant casus : *Aio rectas, punctis datis et puncto D a parte puncti A termi-*

⁽¹⁾ Voir la note de la page 37.

natas, æquari rectis, punctis datis et puncto D a parte puncti E terminatis :

In 1^a nempe figura, rectam ED æquari rectis AD, BD, CD;

In 2^a figura, rectas ED, CD æquari rectis BD, AD;

Et in 3^a figura, rectas ED, CD, BD æquari $<$ rectæ $>$ AD.

In 3^a figura, ex hypothesi, quater AD æquatur rectis AB, AC, AE. Dematur utrimque AD ter : remanebit illinc AD semel ; sed auferre AD ter ab ipsis AB, AC, AE, idem est atque auferre AD semel ab unaquaque ipsarum AB, AC, AE, quo peracto remanebunt istinc BD, CD, ED æquales AD. Quod erat demonstrandum.

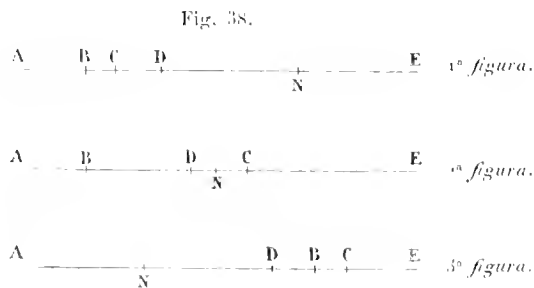
Si darentur quinque puncta, AD quinquies esset conferenda cum quatuor rectis, punctis datis et puncto A terminatis : denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

In 2^a figura, AD quater æquatur rectis AB, AC, AE. Auferatur utrimque AD ter et addatur BD ; remanebunt AD, BD æquales ED, CD.

In 1^a figura, AD quater æquatur rectis AB, AC, AE. Addatur utrimque BD, CD et dematur AD ter ; remanebunt rectæ AD, BD, CD æquales rectæ DE.

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacumque ratione variant casus.

LEMMA ALTERUM. — Exponatur in 1^a figura constructio præcedens, et sumatur in eadem recta punctum N (*fig. 38*), utcumque : *Aio quadrata*



rectarum, punctis datis et puncto N terminatarum, superare quadrata rectarum, punctis datis et puncto D terminatarum, quadrato DN toties

sumpto quot sunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo : — 2^a et 3^a figura varios casus representant.

In 1^a figura, quadrata AN, BN, CN superant quadrata AD, BD, CD, si unumquodque unicuique conferas, quadrato DN ter et rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis; quadrata igitur AN, BN, CN æquantur quadratis AD, BD, CD, quadrato DN ter, et rectangulis AD in DN bis, DB in DN bis, et CD in DN bis : illud autem patet ex genesi quadrati a binomia radice affirmata effecti ⁽¹⁾. Ex alia autem parte, quadratum EN æquatur quadratis ED, ND, minus ED in DN bis, illudque patet ex genesi quadrati a binomia radice negata effecti. Ergo quadrata quatuor AN, BN, CN, EN æquantur quadratis quatuor AD, BD, CD, ED, quadrato DN quater, rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis, minus ED in DN bis. Si igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis, manebit veritas propositionis stabilita : nempe quadrata AN, BN, CN, EN superare quadrata AD, BD, CD, ED quadrato DN quater.

Probandum igitur rectangulum ED in DN bis æquari rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis, et, omnibus ad DN < bis > applicatis, rectam ED æquari rectis AD, BD, CD. Quod quidem ita se habere, superius lemma demonstravit.

Varios casus non moramur. — Si sint quinque puncta, quadrata, punctis datis et puncto N terminata, superabunt quadrata, punctis datis et puncto D terminata, quintuplo quadrati DN : nec differt a tradito casu ulterior demonstratio.

Inde patet summam quadratorum, puncto D terminatorum, esse minimam.

Dum tibi loquimur, scrupulosam nimis casuum observationem non adjungimus; conclusio secundi lemmatis semper eo deducetur, ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex altera, ideoque res ad primum lemma deducetur.

PROPOSITIO PRIMA GENERALIS. — Exponatur superior figura, et sint data

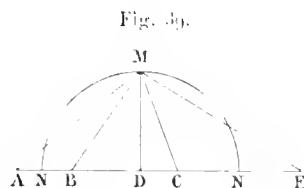
(¹) VIÈTE, *Ad logicam speciosam notæ priores*, prop. XI (éd. Schooten, p. 16-18).

quatuor puncta in recta AE : A, B, C, E. Esto AD quarta pars (conditionaria nempe) rectarum AB, AC, AE, et sit datum Z planum. *Propositur invenire circulum in quo sumendo quodlibet punctum et ab eo jungendo rectas ad puncta data, quadrata junctarum simul sumpta æquantur spatio dato.*

Z planum debet esse majus quatuor quadratis AD, BD, CD, ED, ut locum habeat propositio, ex superius demonstratis.

Æquetur igitur quatuor illis quadratis et præterea quadruplo quadrato DN. Centro D, intervallo DN, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N ex utraque parte (*fig. 39*). Demonstratum est secundo lemmate quadrata AN, BN, CN, EN æquari qua-



dratis AD, BD, CD, ED et præterea quadrato DN quater. At quadrata AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, æquantur Z plano; ergo quadrata quatuor AN, BN, CN, EN æquantur Z plano, hoc est spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis DM et jungantur AM, BM, CM, EM : Aio quatuor illa quadrata æquari spatio dato Z plano.

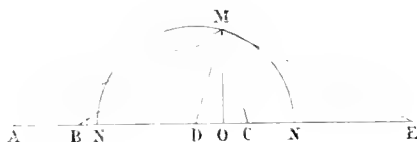
Nam

quadratum AM æquatur quadrato AD et quadrato DM,
quadratum BM æquatur quadrato BD et quadrato DM,
quadratum CM æquatur quadrato CD et quadrato DM,
quadratum EM æquatur quadrato ED et quadrato DM;

ergo quatuor quadrata AM, BM, CM, EM æquantur quadratis quatuor AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DM (sive DN) quater. At quadrata AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, æquantur Z plano seu spatio dato; ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM æquantur spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M (*fig.* 40), a quo demittatur perpendicularis MO. — Similiter probabitur quadrata AM, BM, CM, EM æquari $<$ quadrato OM quater, una cum $>$ quadratis AO, BO, CO, EO quæ, ex secundo lemmate, æquantur quadratis AD, BD, CD, ED et præterea quadrato OD quater. Ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, una cum quadrato OD quater et

Fig. 40.



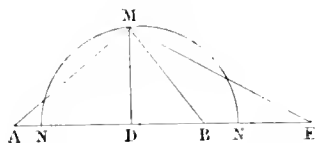
præterea quadrato OM quater. Sed quadratum OD quater, una cum quadrato OM quater, æquatur quadrato DM quater, sive quadrato DN quater : sunt enim DM, DN ex centro æquales inter se. Igitur quadrata AM, BM, CM, EM æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, ideoque spatio dato Z plano sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit et ad quotlibet puncta eadem facilitate et argumentatione extendetur; semper enim toties sumentur quadrata DM, DN, DO, quot erunt puncta, nec fallet ratiocinatio.

Inde sequitur corollarium cujus usus in sequenti propositione.

Exponantur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E (*fig.* 41) et inveniendus circulus $<$ sit $>$ NM, in quo sumendo quodlibet punc-

Fig. 41.



tum, ut M, et jungendo rectas AM, BM, EM, quadrati AM duplum (verbi gratia), una cum quadratis BM, EM, æquetur spatio dato.

Demittatur in rectam AE perpendicularis QR, et rectarum AR, AB, AC, AE sumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac specie in qua dantur quinque puncta) AD, et excitata perpendiculari DO, demittatur in ipsam perpendicularis QO. Rectae QR sumatur pars conditionaria (quintans nempe) RF sive DN, et sit spatium datum aequale quinque quadratis AD, RD, BD, CD, ED et praeterea Z plano. Z planum aequetur \leq quadrato \geq DN quater (pro numero nempe punctorum in recta AE datorum), quadrato NO, et praeterea quadrato NM ⁽¹⁾ quinquies (pro numero omnium punctorum datorum) : Aio circulum centro N, intervallo NM, descriptum praestare propositum.

Sumatur in eo quodlibet punctum, ut I, et junctis AI, BI, CI, EI, QI, ducatur VIX parallela AE, et IY parallela OD. Patet quadratum DI quater, una cum quadrato OI, aequari Z plano, ex corollario praecedentis propositionis : punctum enim D gerit vicem quatuor punctorum. Quum igitur DN sit quintans OD, patet quadratum DI quater, una cum quadrato OI, aequari quadrato DN quater, quadrato ON, et quintuplo quadrati NM. Sed, per constructionem, quadratum DN quater, una cum quadrato ON et quintuplo quadrati NM, aequatur Z plano; ergo quadratum DI quater, una cum quadrato OI, aequatur Z plano.

Sed quadratum DI quater aequatur quadrato DX quater et quadrato XI quater, et quadratum OI aequatur quadrato ON et quadrato XI; ergo Z planum aequatur quadrato DX (sive IY) quater, quadrato XO (sive VQ) semel, et quadrato XI quinquies. Addantur utrimque quadrata quinque AD, RD, BD, CD, ED, fiet inde : spatium datum, haec enim quinque quadrata cum Z plano, ex hypothesi, aequantur spatio dato; inde vero : quinque quadratis AI, BI, CI, EI, QI, quae proinde aequabuntur spatio dato.

Hoc ut constet, ex secundo lemmate, quadrata AD, RD, BD, CD, ED, una cum quadrato DY quinquies, aequabuntur quadratis AY, RY, BY, CY, EY. Igitur quadrata AD, RD, BD, CD, ED, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, aequabuntur quadratis AY, RY,

⁽¹⁾ Les lemmes 7 et 8 de Pappus (prop. 125 et 126) peuvent être rapportés à la détermination du point M.

BY, CY, EY, una cum IY quater et VQ semel. Singulis quadratis AY, BY, CY, EY addatur quadratum IY, fient quadrata AI, BI, CI, EI æqualia quadratis AY, BY, CY, EY et præterea quadrato IY quater; igitur quadrata AD, RD, BD, CD, ED, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, æquabuntur quadratis AI, BI, CI, EI et præterea quadrato RY et quadrato VQ semel. Sed quadratum RY siue VI, una cum quadrato QV, æquatur quadrato QI; igitur quadrata AR, RD, BD, CD, <ED>, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, æquabuntur quadratis AI, BI, CI, EI et QI.

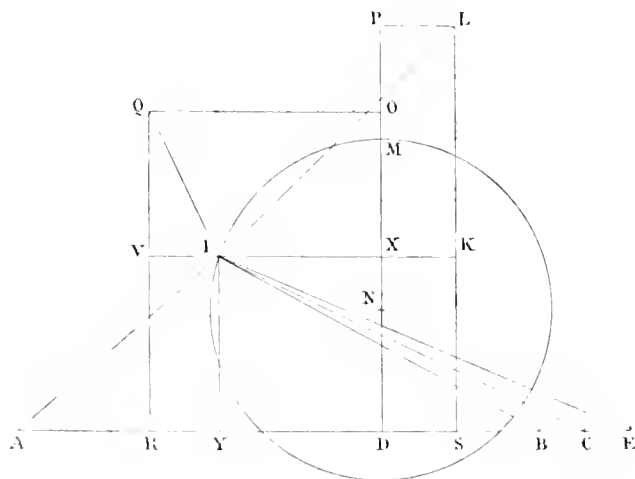
At probatum est quadrata illa omnia æquari spatio dato; ergo quadrata quinque AI, BI, CI, EI et QI æquantur spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Inde facillime deducitur spatium datum æquari quadratis AN, BN, CN, EN, QN et quintuplo quadrati NM, quod tanquam facile prætermittimus.

Imo et ad quodlibet puncta producetur artificium eadem ratione.

Si enim dentur duo puncta Q et L (*fig. 44*) extra lineam, perfecta con-

Fig. 44.



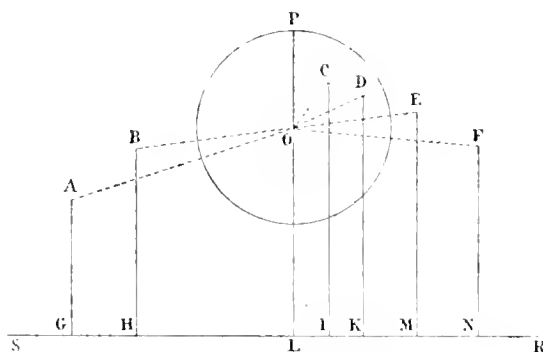
structione, ut vides, sumetur AD sextans rectarum AR, AS, AB, AC, AE; rectarum QR et LS sextans DN sumetur. Spatium datum fiet æquale

quadratis AD, RD, SD, BD, CD, ED, et præterea quadrato DN quater, NO semel, NP semel, et NM sexies; et reliqua perficientur eadem ratione, semperque punctum D vicem geret omnium punctorum in recta AE datorum, et puncta P, O vicem gerent datorum punctorum Q et L; et cætera in infinitum uniformi methodo conserventur, et demonstrabuntur.

Sed quoniam multiplices casus oriuntur ex diversa rectæ assumptæ, duo vel plura puncta contingentis, positione, dum puncta reliqua diversas ex parte qualibet rectæ assignatæ sortiuntur positiones, licet unicuique casui sua competant compendia, placet in artis specimen *generalius ostendere et construere*.

Dentur quotlibet puncta A, B, C, D, E, F (*fig. 45*), sive in eadem recta, sive in diversis. Sumatur in eodem plano recta quævis SR, ita

Fig. 45.



ut omnia puncta data sint ex una parte rectæ SR. Demissis perpendicularibus AG, BH, CI, DK, EM, FN, sumatur rectarum GH, GI, GK, GM et GN pars conditionaria $< GL >$, sextans nempe in hoc casu. Excitetur perpendicularis LO, a quo resecetur LO pars conditionaria, sextans nempe, rectarum AG, BH, CI, KD, EM, FN, et sit spatium datum æquale quadratis AO, BO, CO, DO, EO, FO et sextuplo quadrati OP; circulus centro O, intervallo OP, descriptus satisfaciet propositioni. — Nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit.

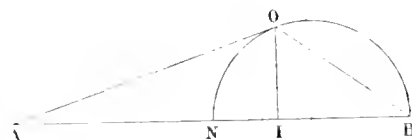
PROPOSITIO VI.

« Si a duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ; a puncto autem ad
 » positione ductam lineam abscissa a recta linea positione data ad datum
 » punctum, et sint species ab inflexis æquales ei, quod a data, et abscissa
 » continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam
 » continget. »

Descripsi propositionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex versione Federici Commandini, sed vel in textu græco vel in interpretatione mendum esse non dubito : sensum propositionis exponam ⁽¹⁾.

Sint duo puncta A et B (fig. 46). Oportet invenire circumferentiam,

Fig. 46.



ut NOB, in qua sumendo quodlibet punctum, ut O, et iungendo rectas OA, OB, et demittendo perpendicularem OI, rectangulum sub recta data in AI æquetur duobus quadratis AO, OB.

Sit primum AB recta data, qui casus satis est facilis.

Sumatur ipsius AB dimidium BN, superque BN semicirculus describatur : Aio satisfacere proposito : hoc est, si sumatur, verbi gratia, punctum O, rectangulum BAI duobus quadratis AO, OB æquale esse.

Nam AO quadratum æquatur AI quadrato et IO quadrato. Si a rectangulo BAI auferatur quadratum AI et quadratum IO sive rectangulum < sub > BI in IN, superest rectangulum sub BI in AN sive in NB,

(1) La version de Commandin est inintelligible; le sens du texte de Pappus paraît être le suivant, plus général que celui adopté ici par Fermat :

Soient donnés deux points A et B, une longueur α , une droite OX et un point O sur cette droite, enfin une direction telle que OY, à laquelle soit parallèle MP passant par un point P de OX, le lieu du point M sera un cercle si

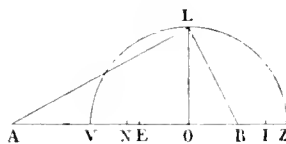
$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \alpha^2 + \overline{OP}^2.$$

quod probandum est esse æquale quadrato BO , et patet ex constructione ita se habere.

Secundus casus est quando recta data major est recta AB , cujus constructionem dabimus, modo recta data sit minor duplâ AB .

Sint data duo puncta A et B (fig. 47), et recta AI , duplâ AB minor ex hypothesi. Oportet facere quod proponitur.

Fig. 47.



Recta AB bifariam secetur in N , et fiat NE ipsius BI dimidia, quod ex constructione licet. Rectangulum IBN ad rectam BE applicetur excedens figura quadrata, et faciat latitudinem rectam EV , cui fiat æqualis recta BZ , et super VZ describatur semicirculus VLZ : Aio satisfacere proposito.

Nam, junctis LA , LB et demissa perpendiculari LO , cujus primus casus sit inter E et B , patet, ex demonstratis ad propositionem III Apollonii ⁽¹⁾, rectangulum EOB , una cum rectangulo VEZ sive NBI , æquari quadrato OL . Addatur utrimque quadratum OB : rectangulum EOB , una cum NBI , æquabitur quadrato LO et quadrato OB . Duplicetur : rectangulum EOB bis, una cum rectangulo NBI bis sive solo ABI , æquabuntur quadratis LO , OB , bis. < Addatur utrimque rectangulum sub NE in OB bis : rectangula EOB bis et NE in OB bis >, sive AB in BO semel, una cum AB in BI , æquabuntur quadratis LO , OB , bis, una cum rectangulo sub NE in OB bis sive IBO semel, ex constructione. Utrimque auferatur quadratum OB : supererit AOB , una cum ABI , æquale quadrato LO bis, quadrato OB semel, et rectangulo IBO . Utrimque IB in BO auferatur, nempe illine ex rectangulo ABI : supererit AO in OB , una cum AO in BI , sive solum rectangulum IOA æquale quadrato LO bis et quadrato OB semel. Addatur utrimque quadratum AO : erit rectan-

⁽¹⁾ Dans le présent livre, p. 34.

» Jungantur AE, BL. Erit angulus ad L rectus; sed et rectus qui
 » ad F; rectangulum igitur AEL est æquale et rectangulo AFB et qua-
 » drato ex FE. »

[« Quoniam enim angulus ALB rectus est æqualis recto AFE, *sunt*
 » *quatuor puncta* L, B, F, E *in circulo ac propterea* rectangulum FAB
 » æquale rectangulo EAL. Quadratum autem ex AE est æquale duobus
 » quadratis ex AF, FE; sed quadrato ex AE æqualia sunt utraque rec-
 » tangula AEL, EAL, et similiter quadrato ex AF æqualia utraque
 » rectangula AFB, FAB; ergo rectangula AEL, EAL æqualia sunt rec-
 » tangulis AFB, FAB, et quadrato ex FE. Quorum rectangulum FAB
 » est æquale rectangulo EAL : reliquum igitur rectangulum AEL rec-
 » tangulo AFB et quadrato ex FE æquale crit. »]

« Rectangulum autem AEL æquale est rectangulo HEK, et rectan-
 » gulum AFB quadrato ex FG : ergo rectangulum HEK quadratis ex EF,
 » FG, hoc est quadrato ex EG, est æquale. »

PROPOSITIO VIII ET ULTIMA.

« *Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam.*
 » *circulus autem non ponatur, quæ sunt ad utrasque partes dati puncti.*
 » *contingent positione eandem datam circumferentiam.* »

Hæc propositio est conversa præcedentis et ex ea facile elici potest
 hujus demonstratio, si contraria via utamur.

Determinationes et casus non adjungimus, quia ex constructione et
 demonstratione satis patent.

DE CONTACTIBUS SPHERICIS.

Apollonii Pergaei doctrinam $\pi\alpha\rho\lambda\iota\ \dot{\epsilon}\pi\alpha\alpha\alpha\omega$ restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larva Franciscus ille Vieta Fontenacensis ⁽¹⁾, ejus mirae in Mathematicis incubationes Veteri Geometriae felices praestitere suppetias. Verum qui materiam hanc contactuum, quae haecenus substitit in planis, ulterius promoverit et ad sphaerica problemata exehere sit ausus, adhuc, quod sciam, exstitit nemo; praecleara tamen inde problemata deduci et ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillime derivari patebit statim. Quaerenda itaque sphaera quae per data puncta transeat aut sphaeras et data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

PROBLEMA I.

Datis quatuor punctis, sphaeram invenire quae per data transeat.

Dentur quatuor puncta N, O, M, F (*fig. 49*), per quae sphaera describenda est.

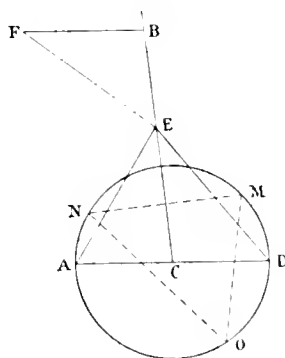
Sumptis ad libitum tribus N, O, M, circa triangulum NOM, quod in uno esse plano constat ex Elementis, describatur circulus NAOM, quem et magnitudine et positione dari perspicuum est. Esse autem circulum NAOM in superficie inveniendae sphaerae patet ex eo quod, si sphaera plano secetur, sectionem dat circulum; at per tria puncta N, M, O unicus tantum circulus describi potest quem jam construximus: quum igitur tria puncta N, O, M sint in superficie sphaerae quaesita, ergo

⁽¹⁾ *Four* plus haut, page 4, note 3.

planum trianguli NOM sphaeram quaesitam secat secundum circulum
NAOM, quem ideo in superficie sphaerae esse concludimus.

Sit ipsius centrum C, a quo ad planum circuli excitetur perpendicularis CEB; patet in recta CB esse centrum sphaerae quaesitae. A puncto F in rectam CB demittatur perpendicularis FB, quam et positione et magnitudine dari perspicuum est. A puncto C ducatur ACD ipsi FB

Fig. 40 (b).



parallela; erit igitur angulus BCA rectus. Sed et recta BC est perpendicularis ad planum circuli; ergo recta ACD est in plano circuli, et datur positio; dantur itaque puncta A, D, in quibus cum circulo concurrat.

Ponatur jam factum esse, et centrum inveniendae sphaerae esse E, quod quidem in recta CB reperiri jam diximus ex Theodosio (2). Junctae rectae FE, AE, ED erunt aequales, quum tria puncta, nempe F ex hypothesi et A et D ex demonstratis, sint in superficie sphaerica. At tres rectae FE, AE, ED sunt in eodem plano : quum enim rectae FB, ACD sint parallelae, erunt in eodem plano ; sed et recta CB, ideoque tres FE,

(1) On a conservé, pour les figures de ce Traité, qui représentent des constructions dans l'espace, le mode de tracés suivi dans l'édition des *Varia*, quelque différentes que soient à cet égard les habitudes modernes.

(2) Theodosii Tripolitae Sphaericorum Libri tres, nusquam antehac graece excusi. Iidem latine redditii per Joannem Penam, Regium Mathematicum. — Ad illustrissimum principem Carolum Lotharingum cardinalem. — Paris, André Wechel, 1558. — (Fermat cite ici le corollaire de I, 2.)

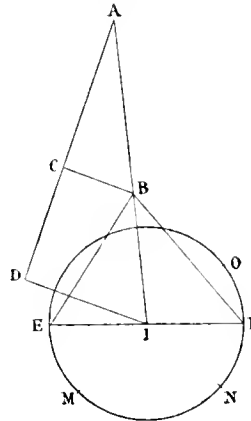
AE, DE. Si igitur circa tria puncta data A, F, D describatur circulus, ejus centrum E erit in recta CB, ac proinde et sphaera quaesita centrum et sphaera ipsa non latebunt.

PROBLEMA II.

Datis tribus punctis et plano. invenire sphaeram quae per data puncta transeat et planum datum contingat.

Dentur tria puncta N, O, M (fig. 50), per quae circulus descriptus MEON; erit ad superficiem sphaericam quaesitam, ex jam demonstratis, et in excitata ad planum circuli recta IBA invenietur centrum sphaerae

Fig. 50.



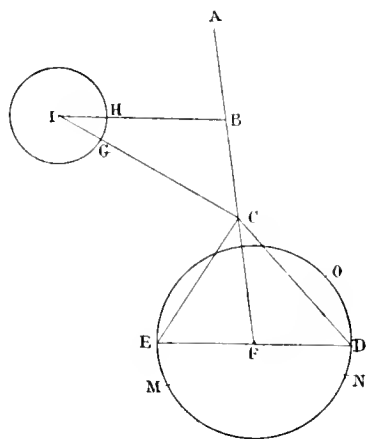
quam quaerimus. Concurrat recta IBA cum plano dato in puncto A; dabitur igitur punctum A positione. A centro circuli MEON demittatur perpendicularis in planum datum ID; dabitur igitur punctum D, ideoque et recta AD positione et magnitudine, et pariter rectae ID et IA. Dabitur igitur planum trianguli ADI positione; datur autem et planum circuli MOX positione : ergo communis illorum planorum sectio FIE dabitur positione, ideoque dabuntur puncta E et F in circulo.

Sit factum et centrum sphaerae quaesitae punctum B. Jungantur rectae BE, BF, et rectae ID parallela ducatur BC. Quum triangulum ADI et recta EIF sint in eodem plano, ergo rectae EB, BF, BC erunt in eodem plano :

Eo itaque deducta est quaestio ut, datis duobus punctis E et F et
 recta AD in eodem plano, quaeratur circulus qui per data duo puncta
 transeat et rectam datam contingat : cui problemati satisfacit Apollonius Gallus (1); dabitur igitur centrum sphaerae B et omnia constabunt.

Datis tribus punctis et sphaera, invenire sphaeram quae per data puncta transeat et sphaeram datam contingat.

Fig. 54.



(¹) Probl. II (VIÈTE, édition Schooten, page 326).

dabitur positione et magnitudine. A centro F ipsi parallela ducatur ED, quæ erit ex jam demonstratis in plano circuli; et dabuntur puncta E et D.

Sit factum et centrum sphaeræ quæsita C : ergo rectæ IC, CE, CD erunt in eodem plano, quod et datum est, quum dentur puncta I, E, D. Contactus autem duarum sphaerarum est in recta ipsarum centra connectente : ergo tanget sphaera quæsita sphaeram datam in puncto G; recta igitur IC superabit rectas CE, CD radio IG. Centro I, intervallo radii sphaerici dati, describatur circulus in plano dato rectarum IC, CE, ED; transibit igitur per punctum G, et circulus ille positione et magnitudine dabitur; sed et puncta E et D in eodem plano.

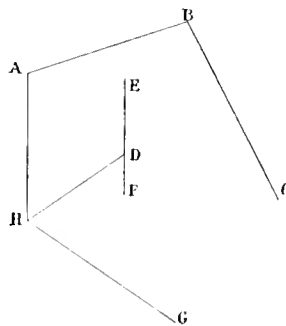
Eo itaque deducta est questio ut ex Apollonio Gallo ⁽¹⁾ quaratur methodus qua, datis duobus punctis et circulo in eodem plano, inveniatur circulus qui per data duo puncta transeat et circum datum contingat.

PROBLEMA IV.

Datis quatuor planis, invenire sphaeram quæ data quatuor plana contingat.

Dentur quatuor plana AH, AB, BC, HG (*fig. 52*), quæ a sphaera quæsita contingi oporteat.

Fig. 52.

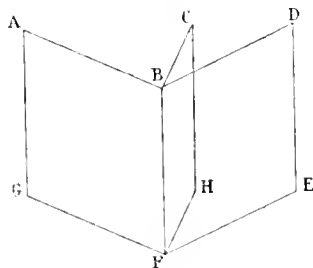


Sint duo plana AF, ED (*fig. 53*) quæ ab eadem sphaera contingantur. Bisecetur ipsorum inclinatio per planum BFHC; patet centrum

⁽¹⁾ Probl. VIII (VIETÉ, édition Schooten, p. 333).

sphaerae quæ duo plana AF, FD contingit, esse in plano bisecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutius immorari. Si plana AF, FD essent parallela, sphaerae centrum esset in plano ipsis parallelo et intervallum ipsorum bisecante.

Fig. 53.



Hoc posito, propter plana CB, BA (*fig.* 52) positione data, $<$ est centrum sphaerae quæsitæ ad planum positione datum, $>$ quod nempe datorum CB, BA planorum inclinationem datam bisecat. Sed, propter duo plana BA, AH, est idem centrum sphaerae quæsitæ ad aliud planum positione datum; ergo communis sectio duorum planorum positione datorum, quorum alterum inclinationem planorum CB, BA, alterum inclinationem planorum BA, AH bisecat, dabit rectam positione datam, in qua inveniendæ sphaerae centrum erit. Sit illa recta FE; sed, propter duo plana AH, HG, est etiam centrum sphaerae quæsitæ ad aliud planum positione datum, ejus concursus cum recta FE positione data dabit punctum D, quod patet esse sphaerae quæsitæ centrum; et reliqua constabunt.

PROBLEMA V.

Datis tribus planis et puncto, invenire sphaeram quæ per punctum datum transeat et plana data contingat.

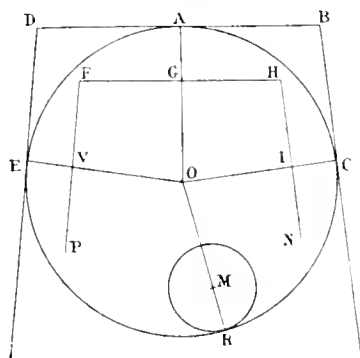
Sint data tria plana AB, BC, CD (*fig.* 54) et punctum H : quærenda sphaera quæ, data tria plana contingens, transeat per punctum H.

Sit factum : tria plana data, ex præcedentis propositionis ratiocinio, dabunt rectam positione datam, quæ sedes erit centri sphaerici quæsitæ.

OV, OG, OI, et per puncta V, G, I intelligentur duci plana VP, GB, IN, datis ED, DB, BC parallela.

Quum recta OR æqualis sit OE, et ablata OM ablata OV, erit reliqua RM reliquæ VE æqualis; datur autem magnitudine RM, quum sit radius sphaeræ datæ: datur igitur et VE magnitudine. Quum autem OE sit perpendicularis ad planum DE, erit etiam perpendicularis ad planum PV, plano DE parallelum; recta igitur VE erit intervallum planorum DE et PV. Sed datur VE magnitudine ex demonstratis; ergo datur planorum DE, PV intervallum. Sunt autem parallela hæc duo plana

Fig. 55.



et datur DE positione ex hypothesi; datur igitur et PV positione. Similiter probabitur plana GH, IN dari positione, et rectas OV, OG, OI ad ipsa esse perpendiculares et aequales rectae OM. Sphaera igitur, centro O, intervallo OM descripta, plana PV, GH, IN positione data contingit. Datur autem punctum M, quum sit centrum sphaerae datae.

Eo itaque deducta est quaestio ut, datis tribus planis PV, GH, IN et puncto M, inveniatur sphaera quae per datum punctum M transeat et data plana PV, GH, IN contingat : hoc est, deducitur quaestio ad praecedentem.

Nec absimili in sequentibus artificio, quum nulla in datis puncta reperientur, sed sphaera tantum aut plana, in locum unius ex sphaeris punctum datum substituetur.

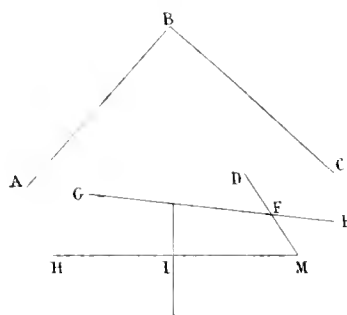
PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis et duobus planis, invenire sphaeram quæ per data puncta transeat et plana data contingat.

Dentur duo plana AB, BC (*fig.* 56), et duo puncta H, M. Querenda sphaera quæ per puncta H et M transeat et plana AB, BC contingat.

Iungatur recta HM et bisecetur in I; punctum I dabitur. Per punctum I trajiciatur planum ad rectam HM rectum. Quum sphaerica superficies puncta H, M contineat, certum est centrum sphaeræ esse in plano ad rectam HM normali et per punctum I transeunte. Datur autem hoc planum positione, quum recta HM et punctum I sint data positione; ergo centrum sphaeræ, propter puncta H et M, est ad planum datum.

Fig. 56.



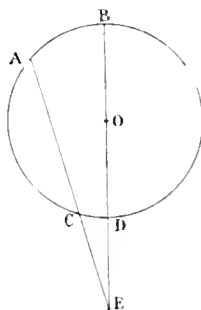
Sed et propter plana AB, BC, ut jam superius demonstravimus, est ad aliud planum datum : ergo est ad rectam positione datam. Sit illa GE, in quam demissa ab uno ex punctis datis M recta $MF < \text{perpendicularis} >$ dabitur positione et magnitudine; et continuatâ in D, ut sit FD æqualis ME, erit punctum D datum et, ex superius demonstratis, erit etiam ad sphaericam superficiem. Dantur itaque tria puncta H, M, D, per quæ sphaera quæsita transit; datur etiam planum AB, quod ab eadem sphaera contingi debet : deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

Priusquam progrediamur ulterius, præmittenda lemmata quædam facilima.

LEMMA I. — Sit circulus BCD (*fig.* 57), extra quem sumpto quolibet puncto E, trajiciatur per centrum recta EDOB. Ducatur quolibet ECA; patet ex Elementis rectangulum AEC æquari rectangulo BED.

Sit jam sphaera circa centrum O, cujus maximus circulus sit ACDB: si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiei sphaericae trajiciatur recta ECA, donec sphaerae ex altera parte occurrat, rectangulum AEC erit similiter æquale rectangulo BED.

Fig. 57.



Si enim intelligatur circa rectam immobilem BDE converti et circulus et recta ECA simul, non immutabuntur rectæ EC et EA, quum puncta C et A circulos describant ad axem rectos, nec ideo rectangulum AEC; erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo BED.

LEMMA II. — Sint duo circuli in eodem plano ADE, HLO (*fig.* 58). Per centra ipsorum trajiciatur recta ACMP, et fiat

ut radius AC ad radium HM, ita recta CP ad rectam MP,

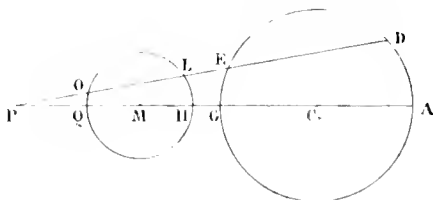
et a puncto P ducatur ad libitum recta POLED, ambos circulos secans in punctis O, L, E, D. Demonstravit Apollonius Gallus ⁽¹⁾ rectangula APQ, GPH esse æqualia, et ipsorum cuilibet æquari rectangula DPO, EPL.

In sphericis idem quoque verum esse sequentium problematum

⁽¹⁾ VIÈTE (édition Schooten, pages 334-335, lemmes I et II) démontre seulement, de fait, que $APQ = DPO$ et $GPH = EPL$. Mais l'égalité $APQ = GPH$ se déduit aisément de l'hypothèse $\frac{AC}{HM} = \frac{CP}{MP}$.

interest: patet autem ex eo quod, si circa axem AP immobilem tam circuli duo quam recta POLED eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ PO, PL, PE, PD, propter allatam in superiori lem-

Fig. 58.



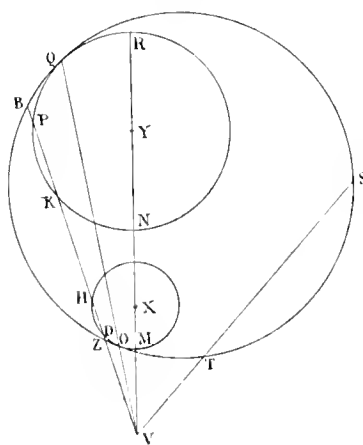
mate rationem, nec ideo rectangula; et in quocumque plano constabit propositum.

LEMMA III. — Sint duæ sphaeræ datæ YN, XM (fig. 59), per quarum centra trajectiatur recta RYXXMV, et fiat

ut radius YN ad radium XM, ita recta YV ad rectam VX.

A puncto V ducatur in quolibet plano recta VTS, et sit rectangulum

Fig. 59.



SVT æquale rectangulo RVM. Si describatur sphaera quævis quæ per puncta T, S transeat et unam ex duabus datis contingat, alteram quoque continget.

Sit enim sphaera OTS, per puncta T et S descripta et sphaeram MX

in puncto O contingens, aio sphaeram YN etiam a sphaera OTS contactam iri.

Producatur recta VO, donec sphaera OTS occurrat in Q : rectangulum igitur QVO, ex primo lemmate, est æquale SVT. Sed rectangulum SVT, ex constructione, est æquale rectangulo RVM cui, ex secundo lemmate, est æquale rectangulum sub VO et rectâ per puncta V et O ad superficiem sphaericam sphaerae YN productâ : ergo punctum Q est ad superficiem sphaerae YN; commune igitur est et superficiei sphaerae YN et superficiei sphaerae OTS.

Aio has duas sphaeras in puncto eodem Q se contingere. Ducatur enim a puncto V quaelibet recta in quolibet plano $<$ per quodlibet punctum $>$ sphaerae OTS, et sit, verbi gratia, VZ, quæ producta secet sphaeras tres in punctis Z, D, H, K, P, B. Rectangulum ZVB in sphaera OTS, per primum et secundum lemma, est æquale DVP rectangulo, sphaeris duabus XM et YN terminato. Sed DV est major rectâ VZ: quum enim sphaera OTS tangat exterius sphaeram XM in puncto O, recta secans sphaeram OTS prius ipsi occurret quam sphaerae XM. Quum ergo probatum sit rectangulum DVP æquari rectangulo ZVB, et recta ZV sit minor rectâ DV, ergo recta PV erit minor rectâ BV: punctum igitur B extra sphaeram YN cadet.

Simili ratiocinio concludetur omnia puncta sphaerae ambientis exterius cadere, præter punctum Q. Tangit igitur sphaera OTS sphaeram YN: quod erat demonstrandum.

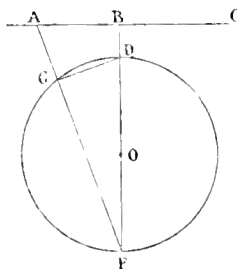
Nec absimilis aut difficilior in contactibus interioribus et in omnibus casibus demonstratio.

LEMMA IV. — Sit planum AC (*fig. 60*) et sphaera DGF, cujus centrum O. Per centrum O ducatur FODB perpendicularis ad planum, et a puncto F ducatur recta quævis ad planum, sphaeram secans in G et planum in A. Aio rectangulum AFG æquari rectangulo BFD.

Nam secentur sphaera et planum datum per planum trianguli ABF, et fiat circulus GFD in sphaera, in plano autem recta ABC. Quum recta FB sit perpendicularis ad planum AC, erit etiam perpendicularis ad

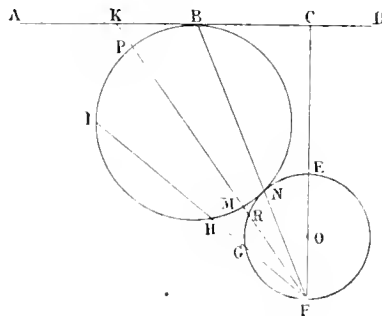
rectam AC. Habemus igitur circulum DGF et rectam AC in eodem plano, et rectam FDB, per centrum circuli transeuntem, ad AC perpendiculararem. Iungatur GD; anguli ad G et ad B sunt recti: ergo quadrilaterum AB DG est in circulo, ideoque rectangulum AFG æquale est rectangulo BFD. Quod etiam in quavis alia sphaera sectione similiter demonstrabitur.

Fig. 60.



LEMMA V. — Sit planum ABD (Fig. 61) et sphaera EGF, cujus centrum O. Per centrum O trajiciatur recta FOEC perpendicularis ad planum, et in quovis alio plano ducatur recta FGH, sitque rectangulum IFH æquale rectangulo CFE. Si per puncta I, H describatur sphaera quae planum AC contingat, eadem sphaera tanget sphaeram EGF.

Fig. 61.



Intelligatur construi sphaera HIB, quae, per puncta I et H transiens, tangat planum AC in puncto B: Aio sphaeram EGF contingi a sphaera HIB.

Iungatur recta FB et rectangulo CFE fiat æquale rectangulum BFN: punctum N, per præcedentem, erit ad superficiem sphaera EGF.

Sed et rectangulum CFE, ex constructione, est aequale rectangulo IFH; rectangula igitur IFH, BFN sunt aequalia, ideoque punctum N est etiam ad superficiem sphaerae IBH.

Probandum jam sphaeram EGF a sphaera IBH in puncto N contingi : quod quidem facile est. A puncto enim F, per quodlibet punctum sphaerae EGF, ducatur recta FR, quae sphaeram IBH in M et P et planum AC in K secet. Rectangulum KFR, ex praecedente lemmate, aequatur rectangulo CFE, cui ex constructione aequatur rectangulum IFH, ideoque PFM. Rectangula igitur KFR et PFM sunt aequalia; sed recta KF est major rectâ FP, quia sphaera IBH tangit planum AC in B : ergo recta FR est minor rectâ FM. Punctum igitur R est extra sphaeram IBH.

Idem de quocumque alio puncto, in quovis plano, sphaerae EGF, ex utraque puncti N parte, probabitur; manifestum itaque sphaeram EGF a sphaera IBH in puncto N contingi.

Haec lemmata, licet sint facilia, pulcherrima tamen sunt, tertium praesertim et quintum : in tertio quippe infinitae sunt sphaerae quae per puncta T et S transeunt sphaeram XM contingunt, sed omnes illae in infinitum tangent quoque ex demonstratis sphaeram YN; in quinto autem lemmate infinitae sunt sphaerae quae, per puncta I et H transeunt, planum AC contingunt, sed omnes illae pariter in infinitum sphaeram EGF ex demonstratis contingent. His suppositis, reliqua problemata facile exsequemur.

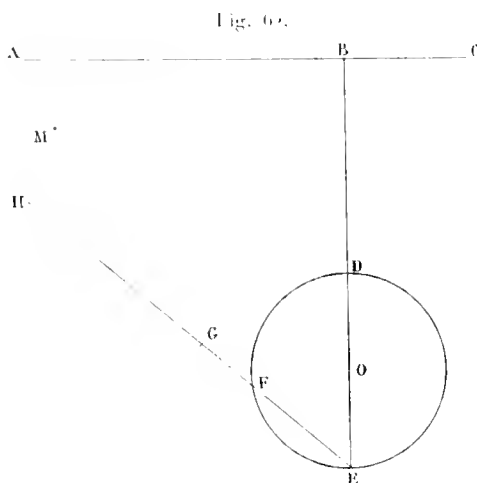
PROBLEMA VIII.

Datis duobus punctis, plano et sphaera, invenire sphaeram quae per data puncta transeat et sphaeram ac planum datum contingat.

Sit datum planum ABC (fig. 62), sphaera DFE et puncta H, M. Per centrum sphaerae datae O in planum ABC datum demittatur perpendicularis EODB; jungatur HE, et rectangulo BED fiat aequale rectangulum HEG; dabitur itaque punctum G.

Datis tribus punctis H, G et M et plano ABC, queratur sphaera, per secundum problema hujus, quae per data tria puncta transeat et planum ABC datum contingat.

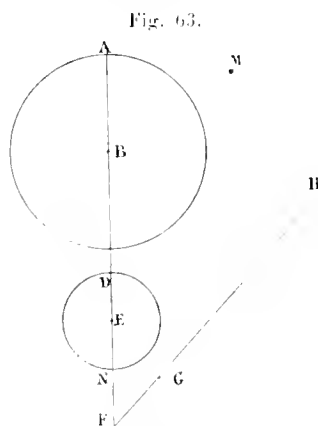
Sphæra illa satisfaciêt proposito : transit quippe per data duo puncta H et M, et planum ABC tangit ex constructione; sed et sphæram DFE contingit, ex quinto lemmate. Nam quum rectangulum HEG æquetur



rectangulo BED, omnis sphæra quæ, per data duo H et G puncta transiens, planum ABC tangit, sphæram quoque DEF contingit.

PROBLEMA IX.

Datis duobus punctis et duabus sphæris, invenire sphæram quæ per data duo puncta transeat et sphæras datas contingat.



Sint datae duæ sphære AB, DE (Fig. 63) et puncta data H et M. Fra-

jiciatur recta AF per centra sphaerarum datarum, et

ut radius AB ad radium DE, ita fiat recta BF ad FE;

dabitur punctum F. Fiat rectangulo NFA aequale rectangulum HFG; dabitur punctum G.

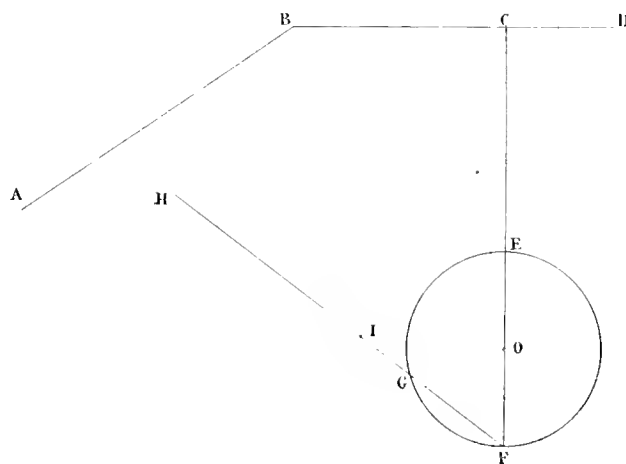
Jam datis tribus M, G, H punctis et sphaera DN, queratur sphaera quæ per data tria puncta transeat et sphaeram DN datam contingat, cui problemati satisfaciet tertium problema hujus: continget quoque sphaeram $\langle AB \rangle$ ex tertio lemmate, ideoque proposito satisfaciet.

PROBLEMA X.

Dato puncto, duobus planis et sphaera, invenire sphaeram quæ per datum punctum transeat et sphaeram ac data duo plana contingat.

Sint duo plana AB, BD (fig. 64), sphaera EGF, punctum H. Per punctum O, centrum sphaere date, in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEOF, et rectangulo CFE fiat aequale rectangulum HFI.

Fig. 64.



Datis duobus punctis H et I et duobus planis AB, BD, queratur, per septimum problema hujus, sphaera quæ per data duo puncta transeat et duo plana data contingat: continget quoque ex quinto lemmate sphaeram, et proposito satisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano et duabus sphaeris, invenire sphaeram quæ per datum punctum transeat et planum ac sphaeras duas datas contingat.

Deducetur statim questio simili præcedentibus ratiocinio ad problema VIII, *Datis duobus punctis, plano et sphaera*, idque beneficio lemmatis V. Quod si libeat uti lemmate III, deducetur questio pariter ad idem problema, alio medio et alia constructione.

PROBLEMA XII.

Dato puncto et tribus sphaeris, invenire sphaeram quæ per datum punctum transeat et sphaeras datas contingat.

Huic quoque figuram non assignamus : statim quippe, beneficio lemmatis III, deducetur questio ad problema IX, *Datis duobus punctis et duabus sphaeris etc.*

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis et duabus sphaeris, invenire sphaeram quæ data plana et sphaeras contingat.

Sit factum. Si ergo sphaericæ superficiei inventæ imaginemur aliam ejusdem centri superficiem parallelam, quæ a quesita distet per radium minoris ex sphaeris, tanget hæc nova superficies sphaerica plana quæ a datis distabunt per intervallum ejusdem radii minoris ex sphaeris; tanget quoque sphaeram cujus radius distabit a radio majoris sphaere datæ per idem radii minoris intervallum, quæque erit majori sphaere concentrica. Dabitur ergo; dabuntur et duo plana datis parallela et per radium minoris ex sphaeris ab ipsis distantia. Transibit et hæc nova superficies sphaerica per centrum minoris ex sphaeris datis, quod quidem datum est; pari igitur quo usi jam sumus in problemate VI artificio, deducetur questio ad problema X, *Dato puncto, duobus planis et sphaera, invenire etc.*

PROBLEMA XIV.

Datis tribus sphaeris et plano, invenire sphaeram quae sphaeras et planum datum contingat.

Simili qua usi sumus via in praecedente et sexto problemate, deducetur quaestio ad problema XI, *Dato puncto, plano, et duabus sphaeris etc.*

PROBLEMA XV.

Datis quatuor sphaeris, invenire sphaeram quae datas contingat.

Sit factum : et, qua usus est methodo Apollonius Gallus ⁽¹⁾ ut problema de tribus circulis ad problema de puncto et duobus circulis deduceret, eadem et simili praecedentibus famosum hoc et nobile problema ad XII, *Datis tribus sphaeris et puncto*, deducemus.

Constabit ex omni parte propositum, et illustre accedet Apollonio Gallo complementum. Casus varios, determinationes, et minuta negleximus, ne in immensum exeresceret sphaericus de contactibus tractatus.

(1) Probl. X (VIÈTE, édition Schooten, p. 356).

Nous avons interverti l'ordre des deux pièces, pour rapprocher les deux poèmes du Traité de Fermat sur ce sujet. Il est certain, au reste, que l'auteur du problème est Etienne Pascal (le père).

AF, FC ⁽¹⁾ et, juncta IF, demittantur in rectas AI, IC perpendiculares CO, FK. Deinde centro F, intervallo AF, describatur circulus AHGEC, cui rectæ CI, IF continuatæ occurrant in punctis G, H, E: denique jungatur GA.

Angulus AFC ad centrum duplus est anguli AGC ad circumferentiam; sed angulus AIC æquatur angulo AFC in eadem portione: igitur angulus AIC duplus est anguli AGC. Sed angulus AIC æquatur duobus angulis AGC, IAG: igitur anguli IGA, IAG sunt æquales, ideoque rectæ IA, IG. Sed, quum a centro F in rectam GC cadat perpendicularis FK, æquales sunt GK, KC, ideoque KI est dimidia differentia inter rectas CI, IG, hoc est inter rectas CI, IA.

Data est autem ratio perpendiculi IB ad differentiam laterum CI, IA: ergo datur ratio BI ad IK et, singulis in rectam AC ductis, data est ratio rectanguli sub AC in BI ad rectangulum sub AC in IK. Sed rectangulum sub AC in BI æquatur rectangulo sub AI in CO; est enim utrumque duplum trianguli AIC: ergo ratio rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AC in IK data est.

Datur autem ex hypothesi angulus AIC et rectus est COI ex constructione: ergo datur specie triangulum COI; ratio igitur CO ad CI data est, ideoque rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AI in IC ratio datur. Sed probavimus rationem rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AC in IK dari: ergo datur ratio rectanguli AIC ad rectangulum sub AC in IK.

Jam in triangulo AFC datur angulus AFC ex hypothesi: ergo angulus FAC datur, cui æqualis CIE idcirco dabitur. Est autem rectus angulus FKI: ergo triangulum FIK datur specie, ideoque rectæ KI ad IF ratio data est, ideoque rectanguli < sub > AC in IK ad rectangulum sub AC in IF datur ratio. Probatum est autem dari rationem rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IK: ergo datur ratio rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IF. Est autem rectangulum CHG æquale rectangulo CIA, quia rectæ IG, IA sunt æquales, et rectan-

(1) Dans les deux figures données par Bossut, les lignes auxiliaires AF, FC sont effectivement tracées; on les a supprimées, pour rendre moins compliquées les fig. 65 et 66.

gulo CHG æquatur rectangulum HIE : ergo ratio rectanguli HIE ad rectangulum sub AC in IF data est.

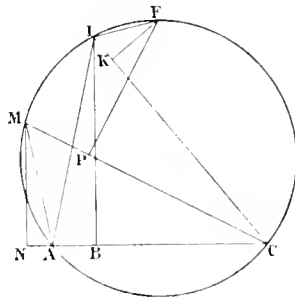
Sit data ratio ED ad AC; quum igitur AC sit data, dabitur ED, que ponatur recte HIE in directum ut in figura prima. Rectangulum igitur HIE ad rectangulum AC in IF est in ratione data ED ad AC; sed, ut DE ad AC, ita DE in IF ad AC in IF : igitur, ut rectangulum HIE est ad rectangulum AC in IF, ita rectangulum DE in IF ad rectangulum AC in IF : rectangulum igitur DE in IF æquatur rectangulo HIE.

Probatum est triangulum AFC dari specie; sed datur basis AC magnitudine : ergo datur AF, ideoque dupla ipsius EH datur.

Equalibus rectangulis DE in IF et HIE addatur rectangulum sub DE in HI : fiet rectangulum sub DE in FH æquale rectangulo DHI. Datur autem rectangulum sub DE in FH, quia utraque rectarum DE, FH datur : datur igitur rectangulum DHI et ad datam magnitudinem DHI applicatur deficiens figura quadrata; ergo recta HI datur, ideoque reliqua IF. Datur autem punctum F positione : ergo datur et punctum I et totum triangulum AIC.

Non est difficilis ab analysi ad synthesis regressus; sed, ut omne dubium tollatur, probatur facillime triangulum quesitum esse simile invento AIC in secunda figura (*fig. 66*) : triangulum autem AIC ex

Fig. 66.



utraque parte puncti F verticem habere potest in æquali a puncto F utrinque distantia; erit enim idem specie et magnitudine, et positio variabit.

Si enim triangulum quesitum non est simile invento, manente eadem

basi, ejus vertex vel ibit inter puncta F et I, vel inter puncta I et A; extravis parte nihil interest, nam de parte FC idem secundum triangulum AIC pari demonstratione concludit.

Sit primum vertex inter A et I et triangulum quæsitum ponatur, si fieri potest, simile triangulo AMC. Jungatur FM et demittatur perpendicularis FP. Erit ratio perpendiculari MN ad MP data ex hypothesi, ideoque æqualis rationi IB ad IK quam probavimus datæ æqualem : quod est absurdum.

Quum enim in triangulo FMP angulus ad M æquatur angulo ad I trianguli IFK, erunt similia triangula FIK, FMP. Sed FM est major FI : ergo MP est major IK. Est autem MN minor IB : non igitur eadem potest esse ratio MN ad MP quæ IB ad IK.

Si punctum M sit inter I et F, probabitur augeri perpendicularum et minui differentiam laterum, idque eadem argumentatione, ideoque variare proportionem. Si punctum M sit in portione FC, utemur secundo triangulo AIC et erit eadem demonstratio, ut inutile sit diutius in his casibus immorari.

Constat igitur triangulum quæsitum invento AIC esse simile, et patet proposito esse satisfactum.

Proponitur, si placet, tam Domino PASCAL quam Domino ROBERVAL solvendum hoc problema :

Ad datum punctum in helice Baliani (¹) invenire tangentem.

Quenam autem sit hujusmodi helix novit Dominus ROBERVAL.

Hujus problematis a nobis soluti solutionem a viris eruditissimis expectamus aut, si maluerint, ipsis impertiemur, imo et generalem de linearum curvarum contactibus methodum.

Sed ne a præsentī materia triangulari vacuis manibus discessisse videamur, proponi possunt hæ quæstiones :

Data basi, angulo verticis, et aggregato perpendiculari et differentie laterum, invenire triangulum. *

(¹) Voir la Lettre de Fermat à Mersenne, du 3 juin 1636.

Data basi, angulo verticis, et differentia perpendiculari et differentia laterum, invenire triangulum.

Data basi, angulo verticis, et rectangulo sub differentia laterum in perpendicularum, invenire triangulum;

Data basi, angulo verticis, et summa quadratorum perpendiculari et differentie laterum, invenire triangulum;

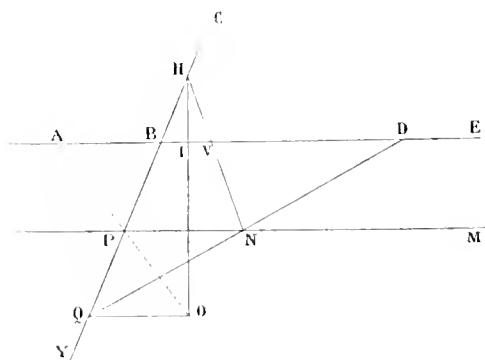
et multe similes, quarum enodationes facilius inventuros viros doctissimos existimo, quam de contactu helices Baliani propositum problema aut theorema.

Sed observandum in questionibus de triangulis, quoties problema poterit solvi per plana, non recurrentum ad solida. Quod quum norint viri doctissimi, supervacuum fortasse subit addidisse.

PORISMATA DUO (¹).

PORISMA I. - *Datis positione duabus rectis ABE, YBC (fig. 67) sese in puncto B secantibus, datis etiam punctis A et D in recta ABE, querantur*

Fig. 67.



duo puncta, exempli gratia, O et N, a quibus si ad quodlibet recta YBC

¹. Cette pièce, conservée, comme la précédente, dans des papiers de Pascal aujourd'hui perdus, est un premier essai de l'opuscule suivant, où l'on retrouvera les deux mêmes propositions, comme *Porisma primum* et *Porisma quintum*.

punctum, ut H, recta OHN inflectatur, rectam ABD in punctis I et V secans, rectangulum sub AI in DV æquetur spatio dato, videlicet rectangulo sub AB in BD.

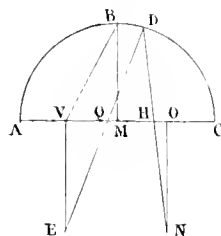
Ita procedit porismatica Enclidis constructio et generalissimam problematis solutionem representabit.

Sumatur punctum quodvis O. Jungatur recta AO secans rectam YBC in puncto P. A puncto O ducatur recta OQ ipsi ABD parallela et recta YBC occurrens in Q. Ducatur etiam infinita PNM eidem ABD parallela, et juncta QD secet rectam PNM in puncto N. Aio duo puncta O et N adimplere propositum.

Sumpto quippe ubilibet in recta YBC puncto H, et ductis rectis OH, NH rectæ ABD occurrentibus in punctis I et V, rectangulum sub AI in DV in quibuslibet omnino casibus (tres tantum triplex ⁽¹⁾ figura representat) rectangulo $<$ sub $>$ AB in BD æquale erit.

PORISMA II. — *Dato circulo ABDC (fig. 68), cujus diameter AC, centrum M, queruntur duo puncta, ut E et N, a quibus si ad quodvis circumferentiæ punctum, ut D, inflectatur recta EDN, diametrum in punctis Q et H secans, summa quadratorum QD et DH ad triangulum QDH habeat rationem datam, idemque in qualibet inflexione generaliter et perpetuo contingat.*

Fig. 68.



A centro M excitetur ad diametrum perpendicularis MB. Fiat ratio data eadem quæ quadruplæ rectæ BV ad rectam VM. A puncto V exci-

(¹) Bossut a reproduit, en effet, trois figures dont nous ne donnons ci-dessus que la première; les deux autres en diffèrent en ce que le point arbitraire H est pris, dans la seconde, entre P et B; dans la troisième, entre P et Q.

tetur VE ad diametrum perpendicularis et ipsi VB æqualis. Sumptâ rectâ MO ipsi MV æquali, fiat ON æqualis et parallela rectæ VE : Dico puncta quæsita esse puncta E et N.

Sumpto quippe quovis in circumferentia puncto, ut D, et junctis ED, ND rectis diametrum in punctis Q et H secantibus, summa quadratorum QD et DH ad triangulum QDH erit, in quocumque casu, in ratione data, hoc est in ratione quadruplæ BV ad rectam VM.

Non solum proponitur inquirenda istius porismatis demonstratio, sed videant etiam subtiliores mathematici an duo alia puncta præter E et N possint problemati proposito satisfacere, et utrum solutiones quæstionis sicut in primo porismate suppetant infinitæ. Si nihil respondeant, Geometriæ in hac parte laboranti non dedignabimur opitulari.

PORISMATUM EUCLIDEORUM

RENOVATA DOCTRINA ET SUB FORMA ISAGOGES RECENTIORIBUS GEOMETRIS EXHIBITA.

Enumeravit Pappus initio libri septimi libros veterum Geometrarum ad *τόπων ἀναλυσόμενων* pertinentes : qui omnes quum temporis injuria perierint, exceptis unico Datorum Euclidis libello et quatuor prioribus Conicorum Apollonii, elaborandum neotericis Geometris maxime fuit ut damnum operum, quæ tentavit « edax abolere vetustas », aliquantisper resarcirent. Et primo quidem subtilissimus ille, nec unquam satis laudatus Franciscus Vieta Apollonii *Περὶ ἐκχρῶν* libros unico, quem Apollonium Gallum inscripsit, libello feliciter restituit : cujus exemplo se ad eandem provinciam Marinus Ghetaldus et Wilebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit proposito eventus : libros enim Apollonii *Αἰγίου ἀποτομῆς*, *Χωρίου ἀποτομῆς*, *Διωρισμένης τομῆς* et *Νεύσεων*, illorum beneficio vix amplius desideramus. Sequebantur Loci plani, Loci solidi, et Loci ad superficiem. At huic quoque parti

non ignoti nominis Geometrae ⁽¹⁾ succurrerunt, eorumque opera, manuscripta licet et adhuc inedita, latere non potuerunt.

Sed supererat tandem intentata ac velut desperata Porismatum Euclideanorum doctrina. Eam quamvis « opus artificiosissimum ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum » Pappus asserat, nec superioris nec recentioris ævi Geometrae vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodo sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcipientibus, et qua ratione in hac materia Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem

se clara videndam
Obtulit et pura per noctem in luce refulsit :

nec debuit inventi novantiqui specimen posteris invideri. Postquam enim Suevicum sidus ⁽²⁾ omnibus disciplinis illuxit, frustra scientiarum arcana tanquam mysteria quædam absecondeamus : nihil quippe impervium perspicacissimo incomparabilis Regine ingenio, nec fas censemus occultare doctrinam quam vel unico duntaxat aut inspirantis aut mandantis nutu, quandocumque libuerit, detectam iri vix possumus dubitare. Ut autem clarius se prodat totum Porismatum negotium,

(1) Fermat fait ici allusion à ses propres travaux, *Apollonii Pergæi libri duo de locis planis restituti, Ad locos planos et solidos Isagoge, Isagoge ad locos ad superficiem*. Quant à ceux des géomètres antérieurs qu'il mentionne, voir plus haut, page 3, note 3.

(2) La date de cet opuscule semble indiquée par ce qu'en dit Boulliau (*Ismaëlis Baulaldi Exercitationes geometricæ tres : I circa demonstrationes per inscriptas et circumscriptas figuras ; II circa conicarum sectionum quorundam propositiones ; III de porismatibus*. — *Astronomiæ Philolaicæ fundamenta, etc.* — Parisiis, apud Sebastianum Cramoisy Regis et Reginae architypographum et Gabrielem Cramoisy, via Jacobæa, sub Cleonii, MDCLVII. Cum privilegio Regis), au début de son Essai sur les Porismes.

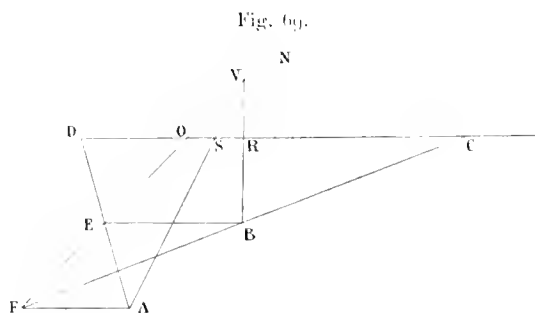
Voici le passage qui en a été reproduit dans les *Varia*, douzième page non numérotée :

« Hanc de porismatibus scriptumculam data mihi occasione composui, quum ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat, in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus et in judiciis exercendis peritissimus, rerum mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas et porismata, quæ tam theorematice quam problematice proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi unius monumentis et Collectionibus Mathematicis porismatum naturam et usum discere possumus, quum ex veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obvia non est, textusque corruptione et applicationis porismatum defectu obscurior procul dubio evadit. Interea, dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici juris facere placuit, ut alios ad eorundem

celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus, easque Geometris et considerandas et examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit Porisma et cui maxime inserviat usui innotescat.

PORISMA PRIMUM.

Sint duæ rectæ ON, OC (*fig. 69*), quæ angulum constituent in puncto O et sint ipsæ positione datae; dentur et puncta A et B . A punctis B et



A ducantur rectæ BE, AF ipsi OC parallele et occurrentes rectæ NO productæ in punctis E et F ; jungatur recta AE , quæ rectæ CO productæ occurrat in D ; jungatur itidem recta FB , quæ eidem rectæ CO occurrat

investigationem impelleremus, ipsumque amplissimum Dominum de Fermat ad sua edenda, utinam et ad alta sublimis intellectus sui εὐρηματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem a subtilissimis ætatis nostræ Geometris, Bonaventura Cavaliero Bononiæ et Evangelista Toricello Florentiæ, summis laudibus in cælum ferri, ejusque inventa mirabilia prædicari auribus meis audivi: quem etiam virum, tam eximii virtutibus clarum, multaque eruditione ornatum ac in rebus mathematicis oculatissimum, toto pectore veneror ac colo. »

L'opuscule de Fermat sur les Porismes n'aurait donc pas été connu à Paris avant 1654. La dédicace à la reine Christine de Suède est d'ailleurs expliquée par le passage suivant d'une lettre du 25 septembre 1651, adressée à Nicolas Heinsius par Bernard Médon, conseiller au présidial de Toulouse et ami de Fermat (*Sylloges epistoliarum a viris illis tribus scriptarum tom. quinque, collecti et digesti per Petrum Burmannum*, Leyde, 1727, t. V, p. 643, l. 241) :

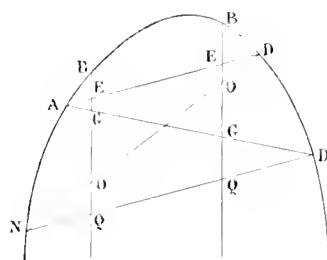
Salutat te amplissimus Fermat, a quo circa mathematicas scientias, quas melius quam quisquam mortaliū possidet, nil extorqueri nunquam poterit, nisi Reginarum præstantissima Christina velit aliquando post hujus ævi literatorum omnium vota, post Franciæ Cancellarii preces, sua etiam jussa adungere, quibus, ut puto, non surdus esset. Si tua cura posset id fieri, faceres toti Europæ rem pergratissimam. Vale iterum et, quod facis, me constanter ama. »

in C; et ad quodvis punctum rectæ ON, ut V, verbi gratia, inflectantur rectæ AV, BV, ita ut recta AV occurrat rectæ OC in puncto S, recta autem BV eidem OC occurrat in puncto R. Rectangulum sub CR in DS æquale semper erit rectangulo sub CO in OD, ideoque spatio dato.

PORISMA SECUNDUM.

Exponatur parabole quævis NAB (*fig. 70*), cujus diametri qualibet sint BEO. Sumantur in curva duo quævis puncta A et N, a quibus in-

Fig. 70.

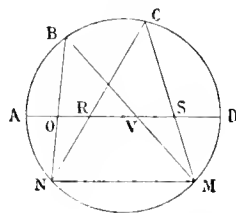


flectantur ad aliud quodvis curvæ punctum, ut D, rectæ ADN, quæ in diametris puncta E, O, G, Q signent. In eadem diametro abscinduntur semper duæ rectæ quæ eandem servabunt rationem: erit nempe ut OB ad BE, ita QB ad GB, idque in infinitum.

PORISMA TERTIUM.

Esto circulus cujus diameter recta AD (*fig. 71*), cui parallela ut-

Fig. 71.



cumque ducatur NM, circulo in punctis N et M occurrens, et sint data puncta N et M. Inflectatur utcumque recta NBM, quæ secet diametrum

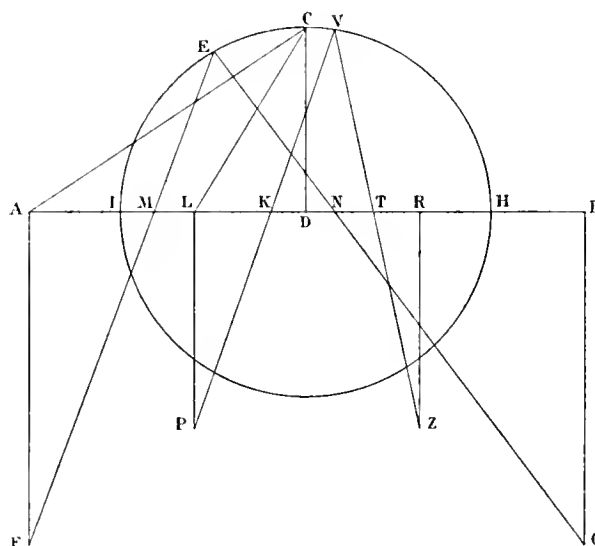
in punctis O et V. Aio datam esse rationem rectanguli sub AO in DV ad rectangulum sub AV in DO : ideoque, si inflectatur NCM secans diametrum in punctis R, S, erit semper ut rectangulum sub AO in DV ad rectangulum sub AV in DO, ita rectangulum sub AR in DS ad rectangulum sub AS in DR.

Nec difficile est propositionem ad ellipses, hyperbolas et oppositas sectiones extendere.

PORISMA QUARTUM.

Exponatur circulus ICH (*fig. 72*), cujus diameter IDH data, cen-

Fig. 72.



trum D, radius ad diametrum normalis CD. Sumantur in diametro producta puncta B et A data, et sint rectæ AL, BH æquales.

Fiat

ut DI ad IA, ita DL ad LI,

et sit recta DR æqualis DL; dabuntur puncta R et L. Jungatur recta CA, cui æqualis ponatur AF ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat BG æqualis et parallela. Inflectatur quævis recta ad circulum a punctis F et G, ut FEG, quæ diametrum secet in punctis M et N. Aio

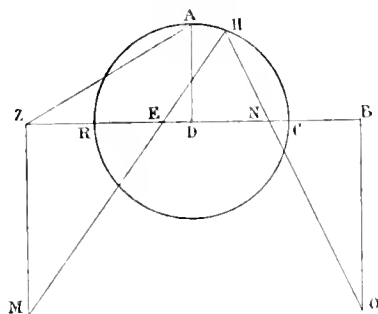
summam duorum quadratorum RM , LN aequari semper eidem spatio dato.

Iisdem positis, in secundo casu, jungatur recta CL , cui æqualis ponatur LP ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis et parallela fiat RZ . Si a duobus punctis Z et P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta, ut PVZ , secans diametrum in punctis K et T , quadratorum AT et BK aggregatum æquabitur semper alteri spatio dato.

PORISMA QUINTUM.

Esto circulus RAC (*fig. 73*), cujus diameter RDC data, centrum D , radius DA ad diametrum normalis. Sumantur utcumque puncta Z et B data in diametro a centro D æquidistantia, et, junctâ AZ , fiat æqualis

Fig. 73.



ZM ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis et parallela ducatur BO . Inflectatur quævis ad circumferentiam recta MHO quæ diametrum in punctis E et N secet. Erit semper ratio quadratorum EH , HN simul sumptorum ad triangulum EHN data, eadem nempe quæ rectæ AZ ad quartam partem rectæ ZD .

Ex adductis porismatibus (quorum propositiones elegantissimas et pulcherrimas esse quis diffiteatur?) haud difficulter indaganda se prodit ipsa porismatum natura. Enunciari nempe posse, secundum Pappum, vel ut theorematum vel ut problematum statim patet; nos sane ut theorematum enunciamus, sed nihil vetat quominus in problematum transformetur.

Exempli causa, sic quintum porisma concipi potest : *Dato circulo RAC, cujus diameter RC, quærantur duo puncta, ut M et O, a quibus si inflectatur quævis ad circumferentiam recta ut MHO, faciat semper rationem quadratorum ab abscissis EM, HN ad triangulum EHN datam.* Nec latet ex supradicto theoremate constructio : si enim ponatur recta AZ esse ad quartam partem ZD in ratione data, omnia constabunt, eademque ratione in reliquis et omnibus omnino porismatibus theoremata in problemata facile transibunt.

Quod autem innuit Pappus ex sententia juniorum geometrarum porisma deficere hypothèsi a locali theoremate ⁽¹⁾, id sane totam porismatis naturam specificè revelat, neque alio fere auxilio quam eo quod hæc verba subministrarunt, hujusce abdita materiæ penetravimus.

Quum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsam inveniendæ lineæ designaverimus; sed quum ex supposito loco dato et cognito alium locum venamur, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide : qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem et esse et vocari verissime Pappus subjunxit.

Exemplo unico definitionem nostram astruemus in figura quinti porismatis : Datâ rectâ RC, si quæretur curva quælibet, ut RAC, cujus ea sit proprietas ut a quolibet ipsius puncto, ut A, demissa perpendicu-

(1) C'est-à-dire que, d'après cette définition, le porisme serait un théorème énonçant la propriété d'un lieu, sans que la détermination complète de ce lieu soit donnée dans l'énoncé. Cette détermination reste donc à trouver, en même temps que la propriété est à démontrer.

Au temps d'Euclide, le nom de *porisme* paraît avoir été employé pour désigner spécialement les propositions où il s'agissait de *trouver*, tandis que, dans les théorèmes, il s'agissait de *démontrer*, dans les problèmes de *construire*. Euclide a appliqué ce terme de *porisme* à un ensemble de propositions relatives à la matière devinée par Michel Chasles, dans sa célèbre restitution (*Les trois livres de Porismes d'Euclide*, etc. Paris, Mallet-Bachelier, 1860), mais il ne voulait probablement pas spécialiser particulièrement le sens de l'expression.

L'intention que lui prête Fermat un peu plus bas est donc improbable, et elle restreint trop le sens général du mot *porisme*, sans d'ailleurs désigner en aucune façon la nature réelle des propositions traitées par Euclide.

laris AD faciat quadratum AD æquale rectangulo RDC, inveniemus curvam RAC esse circuli circumferentiam. Sed si ex dato jam loco illo alium investigemus, problema, verbi gratia, porismatis quinti, novus iste locus et infiniti alii quos periti sagacitas analystæ representabit et ex jam cognito eliciet, porisma dicetur.

Quum autem, ut jam diximus, porismata ipsi sint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi *porismatum opus perutile* ait *ad resolutionem obscuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam* : quæ ultima verba quum nullum fere sensum admittant, ad ipsum auctorem recurrendum cujus verba in manuscriptis codicibus ita se habent : *πρὸς μὲν ἐστὶ πολλοὺς ὁλοσχερῶς ἐκτελεζόμενον εἰς τὴν ἀνάγκην τῶν ἐμβριθεστέρων προσέκτιπτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίκλιπτον τῆς φύσεως παραχρυσμένης πλῆθος* (¹).

Ait igitur *porismata conferre ad analysin obscuriorum problematum et generum*, hoc est problematum generalium : ex dictis enim apparet porismatum propositiones esse generalissimas. Deinde subjungit : *quum natura multitudinem quæ vix potest animo comprehendere subministret* : quibus verbis infinitas illas et miraculo proximas ejusdem problematis indicat solutiones.

Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deest peculiaris a puriore Analysis derivanda methodus, cujus ope non solum quinque præcedentia porismata sed pleraque alia et invenimus et construximus et demonstravimus, et si hæc paucula, quæ isagogica tantum et accuratioris operis prodroma emittimus, doctis arrideant, tres totos

(¹) Voici comment Chastes (p. 14) traduit ce texte, assez obscur et mal assuré :

« Les Porismes... collection ingénieuse d'une foule de choses qui servent à la solution des problèmes les plus difficiles et que la nature fournit avec une inépuisable variété. »

Dans cette traduction, les mots *d'une foule* devraient être supprimés. Après *servent*, il faudrait ajouter *à beaucoup* (par opposition à *tous*). Enfin, après *difficiles*, il faudrait dire *et quoique la nature les fournisse avec une inépuisable variété*, en liant avec ce qui suit : *il n'a rien été ajouté à cet Ouvrage d'Euclide*.

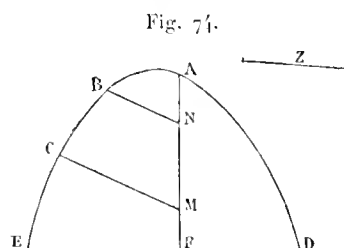
Telle est du moins l'opinion de Heiberg. Le savant éditeur de Pappus, Hultsch (p. 648, l. 18 à 21), regarderait, au contraire, comme interpolés les mots *à beaucoup* et ceux qui suivent la phrase grecque citée par Fermat.

Porismatum libros aliquando restituemus, imo et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in conic sectionibus et aliis quibuscunque curvis mirabilia sane et haecenus ignota detegemus ⁽¹⁾.

PROPOSITIO D. DE FERMAT CIRCA PARABOLEN ⁽²⁾.

Proposui *per data quatuor puncta parabolam describere*. Duplex est casus, utrique lemma sequens præmittendum.

Sit parabole in 1^a fig. ECBAD (*fig. 74*), cujus diameter AF detur positione; dentur etiam duo puncta B et C, per quæ transit parabola;



dentur denique anguli applicatarum ad diametrum AF. Aio parabolam positione dari.

Applicentur ordinatim BN et CM; a puncto dato B in AF positione

⁽¹⁾ *Idem*, sur cet opuscule, le jugement de Chasles (p. 3, §. 22). Il est certain que l'essai de Fermat doit être considéré comme tout autre chose que comme une tentative de restitution des Porismes d'Euclide, soit dans la forme des énoncés, encore incertaine aujourd'hui, soit pour le fond du sujet traité. Il faut y voir plutôt une indication de questions offrant quelque analogie avec celles abordées par Euclide.

Chasles n'a qu'un seul porisme, CXXVI (p. 230), qui se rapporte à l'un de ceux de Fermat, le troisième. Comme il le fait remarquer d'ailleurs, le second porisme de Fermat, où figure une parabole, est étranger à l'ordre d'idées d'Euclide, lequel se borne aux droites et aux cercles. Enfin, avec le troisième, il n'y a guère que le premier que l'on pourrait considérer comme rentrant dans un des vingt-neuf genres énumérés par Pappus.

Au lieu donc, comme l'a fait Chasles, de chercher ici, en s'aidant des lemmes de Pappus, à retrouver des propositions rentrant dans ces vingt-neuf genres, Fermat a voulu plutôt, dans ce spécimen, montrer que ces genres pouvaient être multipliés indéfiniment.

⁽²⁾ Cette pièce est insérée dans les *Varia* au milieu de lettres d'octobre 1636.

datam ducitur BN in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) : ergo datur punctum N; similiter datur punctum M et rectæ BN, CM positione et magnitudine. Ex natura paraboles est

ut quadratum CM ad quadratum BN, ita MA ad NA,

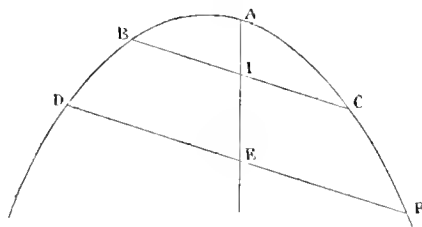
si ponas A esse verticem paraboles sive extremum diametri; ergo datur ratio MA ad NA, et dividendo datur ratio MN ad NA. Datur autem recta MN, quia duo puncta M, N dantur; datur igitur NA et punctum A. Si fiat

ut AN data ad NB datam, ita NB ad Z,

dabitur Z rectum paraboles latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, AF diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52, I Apollonii.

Hoc supposito, facillime construitur primus casus in 2^a fig. (*fig. 75*), in qua dentur quatuor puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas BC, CF, FD, DB, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel, ut in hoc casu, erit BC, verbi gratia, parallela DF.

Fig. 75.



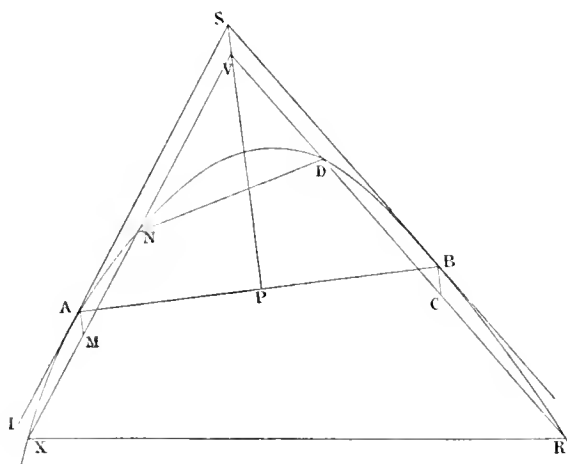
Bifariam utraque dividatur in punctis I et E et sit factum : ergo juncta IE erit diameter paraboles, quum æquidistantes bifariam dividat. Dantur autem puncta I et E : ergo IE positione datur et angulus DEI. Quum igitur diameter IE positione detur, dentur etiam angulus applicatarum et duo puncta B et D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole DBACF.

In secundo casu major est difficultas, quum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans. In 3^a fig. sint data

quatuor puncta X, N, D, R (*fig.* 76), quæ per rectas XR, RD, DN, XX conjungantur, et neutra oppositarum sit alteri æquidistans.

Ponatur jam factum esse, et descriptam parabolam XANDBR proposito satisfaciensem. Concurrent productæ XX, RD, in puncto V et, bifariam divisas XX, RD in punctis M et C, ducantur ad ipsas diametri MA, CB, occurrentes parabolæ in punctis A et B, a quibus rectæ IAS, SB ipsæ XV, VR ducantur æquidistantes et concurrent in puncto S. Juncta AB bifariam dividatur in P et jungatur SP.

Fig. 76.



His ita constructis, patet, quum per verticem diametri MA ducatur IAS æquidistans applicatæ XX, rectam IAS tangere parabolam in A: probabitur similiter rectam SB tangere eandem parabolam in B: ergo, per 17, III Apollonii erit

ut rectangulum XVN ad rectangulum RVD,
ita quadratum AS ad quadratum SB.

Datur autem ratio rectanguli XVN ad rectangulum RVD, quum dentur quatuor puncta X, N, D, R: ergo datur ratio quadrati AS ad quadratum SB, ideoque rectæ AS ad rectam SB. Datur autem angulus ASB, quia propter parallelas æquatur angulo XVR dato: ergo in triangulo ASB datur angulus ad verticem S et ratio laterum AS, SB, ideoque

triangulum ASB datur specie; igitur datur angulus SAB et ratio SA ad AB. Quum autem AP sit dimidia AB, datur etiam ratio SA ad AP : in triangulo igitur SAP datur angulus ad A, et ratio laterum SA, AP : datur igitur specie et angulus PSA datur.

Hoc posito, quum recta SP rectam AB puncta contactuum conjungentem bifariam dividat, erit diameter paraboles, ex 29, II Apollonii : in parabola autem omnes diametri sunt inter se æquidistantes : ergo diameter MA rectæ SP æquidistabit, ideoque angulus IAM æquabitur angulo ASP. Probavimus autem dari angulum ASP : ergo dabitur angulus IAM et ipsi alternus propter parallelas NMA. Datur autem punctum M, quia rectam NX positione et magnitudine datam bifariam dividit : ergo datur diameter MA positione; datur etiam angulus applicatarum AMN, et dantur duo puncta N et D per quæ transit parabole : datur igitur parabole positione ex lemmate, et est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Patet autem duas parabolas in hoc secundo casu propositum adimplere : concurrent enim rectæ DN et XR, quas posuimus non esse parallelas; hoc casu eadem argumentatione nova constructur parabole proposito satisfaciens.

< LOCI AD TRES LINEAS DEMONSTRATIO > ⁽¹⁾.

Exponentur tres rectæ positione datæ triangulum constituentes : AM, MB, BA (*fig. 77*), et sit quodvis punctum O a quo ad rectas datas ducantur rectæ OE, OI, OD in angulis OEM, OIM, ODB datis. Sit autem

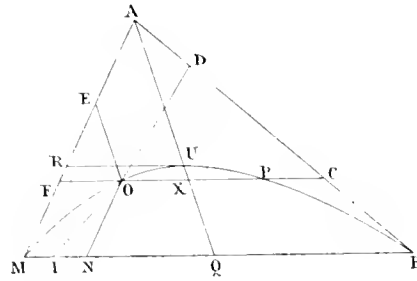
(1) Ce morceau inédit est publié d'après une copie du XVII^e siècle, classée dans la chemise « Fermat » du portefeuille 1848 I de la collection Ashburnham. Cette copie, sur une feuille double, sans titre, porte à la fin, d'une autre écriture du temps, la mention : *Pour Mons^r Carcavi rue Michel Leconte au milieu*, et, en haut, de la main de Libri, l'attribution à Fermat. Cette attribution est corroborée par la Lettre de Fermat à Roberval, du 20 avril 1637, d'après laquelle le titre a été composé.

La question traitée est énoncée dans Pappus (éd. Hultsch), page 678, lignes 15 et suivantes.

ratio rectanguli EOD ad quadratum OI data : Aio punctum O esse ad unam ex conic sectionibus.

Dividatur MB bifariam in Q et, iunctâ AQ, ducantur per punctum O rectæ FOC, ON ipsi MB, MA parallelæ.

Fig. 77.



Tria triacula OEF, ODC, OIN sunt specie data : nam ex hypothesi dantur anguli OEF, ODC, OIN; datur etiam EFO quia, propter parallelas, dato AMB est æqualis; datur et OCD quia æqualis dato MBA; denique datur ONI, quum detur ONB ipsi AMB propter parallelas æqualis. Datur igitur ratio OE ad OF; datur item ratio OD ad OC : ergo ratio rectanguli EOD ad rectangulum FOC datur. Datur autem, ex hypothesi, ratio rectanguli EOD ad quadratum OI : ergo ratio rectanguli FOC ad quadratum OI datur. Datur autem ratio quadrati OI ad quadratum ON, propter datum specie triangulum OIN : ergo ratio rectanguli FOC ad quadratum ON, siye FM ipsi æquale, datur.

Si secetur AQ in U ita ut, ductâ UR parallelâ MB, quadratum UR ad quadratum RM sit in ratione data rectanguli FOC ad quadratum FM (hoc autem est facile, quum angulus MRU detur), et per punctum U describatur, circa diametrum AQ, conic sectio quam rectæ MA, AB in punctis M, B contingant (id autem est facillimum et ex \langle vario \rangle ⁽¹⁾ puncti U situ erit aut parabole aut hyperbole aut ellipsis : superflua, presertim tibi, non addimus) : Aio conic sectionem sic descriptam per punctum O transire.

(1) Le mot *vario* a été restitué à la place d'une lacune de cinq lettres environ dans le manuscrit.

Nam transeat ex alia parte per punctum P. Tanget recta UR sectionem, quum sit parallela ordinatæ MB: quum igitur sectio transeat per punctum O, erit

rectangulum PFO ad quadratum FM ut quadratum UR ad quadratum RM,

ex decima sexta propositione III Apollonii. Ut autem

quadratum UR ad quadratum RM, ita est rectangulum FOC ad quadratum FM,

ex constructione : rectangulum igitur PFO rectangulo FOC aequale erit, ideoque recta FO rectæ PC.

Quod quidem ita se habet : nam, quum AQ dividat bifariam MB, erit recta FX rectæ XC aequalis; propter sectionem vero, recta OX est aequalis XP : reliqua igitur FO reliquæ PC aequatur.

Nec est difficilis ab analysi ad synthesim, per demonstrationem ducentem ad impossibile, regressus.



AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS

ISAGOGÉ ⁽¹⁾.

De locis quamplurima scripsisse veteres, haud dubium : testis Pappus initio Libri septimi ⁽²⁾, qui Apollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio ; illud auguramur ex eo quod locos quamplurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ et peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam. Linea recta unica et simplex est, curvæ infinitæ : circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, etc.

Quoties quantitatibus ignotæ terminus localis describit lineam rectam aut circulum, fit locus planus ; at quando describit parabolam, hyperbolam vel ellipsin, fit locus solidus ; si alias curvas, dicitur locus

⁽¹⁾ Le texte de cet important Traité est très défiguré dans l'édition des *Varia Opera* de 1679, en particulier par l'adoption de la notation cartésienne des exposants. L'*Isagoge*, qui renferme les éléments de la Géométrie analytique moderne, et notamment une discussion de l'équation générale du second degré à deux inconnues, a cependant été rédigée et même, d'après l'article du *Journal des Savants* du 9 février 1665, communiquée par Fermat avant l'apparition de la *Géométrie* de Descartes. D'un autre côté, il est aisé de se convaincre que Fermat est toujours resté fidèle aux errements de Viète et n'a jamais fait usage dans ses écrits de la notation des exposants, sauf pour des cas exceptionnels, comme lorsqu'il faisait allusion aux travaux de Descartes.

L'existence, dans le portefeuille 1848 I de la collection Ashburnham, d'une ancienne copie de l'*Isagoge* a permis de rétablir en toute sûreté la notation employée par Fermat et d'éliminer certaines additions faites à son texte sur le manuscrit qui avait servi pour l'édition des *Varia*.

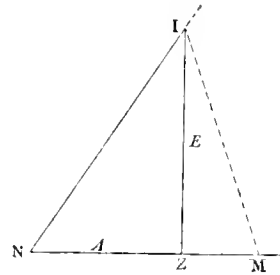
⁽²⁾ Pappus, éd. Hultsch, page 636, lignes 22 et 23.

linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillime ex planorum et solidorum investigatione linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem institui possunt aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus (quem ut plurimum rectum sumemus), et alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus; modo neutra quantitarum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

Recta data positione sit NZM (*fig. 78*), cujus punctum datum N; NZ

Fig. 78.



aequetur quantitati ignotæ A , et ad angulum datum NZI elevata recta ZI sit æqualis alteri quantitati ignotæ E .

$$D \text{ in } A \text{ æquetur } B \text{ in } E :$$

punctum I erit ad *lineam rectam* positione datam.

Erit enim

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \text{ ita } A \text{ ad } E.$$

Ergo ratio A ad E data est, et datur angulus ad Z, triangulum igitur NIZ specie, et angulus INZ; datur autem punctum N et recta NZ positione: ergo dabitur NI positione, et est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partium sunt data, partium ignotis A et E admixta, vel in datas ductis vel simpliciter sumptis.

$$Zpl. — D \text{ in } A \text{ æquetur } B \text{ in } E.$$

Fiat

$$D \text{ in } R = \text{aequate} = Zpl.;$$

erit

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \text{ ita } R = A \text{ ad } E.$$

Fiat MN aequalis R : dabitur punctum M , ideoque MZ aequabitur $R = A$. Dabitur ergo ratio MZ ad ZI ; sed datur angulus ad Z , ergo triangulum IZM speciei, et concludetur rectam MI junctam dari positione, ideoque punctum I erit ad rectam positione datam. Idemque nullo negotio concludetur in qualibet aequalitate ejus homogenea quaedam afficientur ab A vel E .

Et est simplex haec et prima locorum aequalitas, ejus beneficio inveniuntur loci omnes ad lineam rectam : verbi gratia, septima propositio Libri I *Apolloniï de locis planis* ⁽¹⁾, quae generalius jam poterit enuntiari et construi.

Huic aequalitati subest pulcherrima propositio sequens, quam nos illius ope deteximus :

Si sint quotcumque rectae lineae positione datae atque ad ipsas a quodam puncto ducantur rectae in datis angulis, sit autem quod sub ductis et datis efficitur dato spatio aequale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quae Apollonianis merito possent opponi.

Secundus hujusmodi aequalitatum gradus est, quando

$$A \text{ in } E = \text{aeq.} = Zpl.,$$

quo casu punctum I est ad *hyperbolam*.

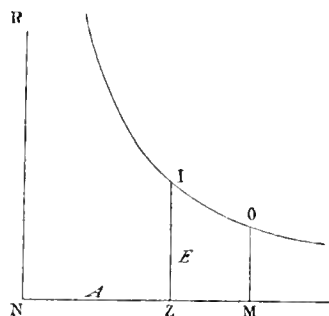
Fiat NR (*fig.* 79) parallela ZI ; sumatur in NZ quodlibet punctum, ut M , a quo ducatur MO parallela ZI ; et fiat rectangulum NMO aequale Zpl .

Per punctum O , circa asymptotos NR , NM , describatur hyperbole :

⁽¹⁾ *Four* plus haut, page 24, note 1.

dabitur positione et transibit per punctum I, quum ponatur rectangulum A in E , sive NZI , æquale NMO .

Fig. 79.



Ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data, vel ab A aut E aut A in E affecta.

Ponatur

$$Dpl. + A \text{ in } E = \text{æq.} \quad R \text{ in } A + S \text{ in } E.$$

Igitur, ex artis præceptis,

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E + A \text{ in } E = \text{æquabitur} \quad Dpl.$$

Effingatur rectangulum abs duobus lateribus, in quo homogenea

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E + A \text{ in } E$$

reperiantur : erunt duo latera

$$A = S \quad \text{et} \quad R = E$$

et rectangulum sub ipsis æquabitur $R \text{ in } A + S \text{ in } E + A \text{ in } E = R \text{ in } S$.

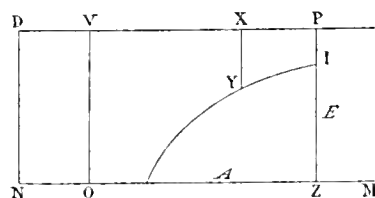
Si igitur a $Dpl.$ abstuleris $R \text{ in } S$, rectangulum sub $A = S$ in $R = E$ æquabitur $Dpl. - R \text{ in } S$.

Fiat NO (fig. 80) æqualis S , et ND , parallela ZI , fiat æqualis R ; per punctum D ducatur DP parallela NM , < per punctum O > OV parallela ND , et ZI producat in P .

Quum NO æquetur S , et NZ , A , ergo $A = S$ æquabitur OZ sive VP ; similiter, quum ND , sive ZP , æquetur R , et ZI , E , ergo $R = E$ æqua-

bitur PI : rectangulum igitur sub VP in PI æquatur dato $Dpl. = R$ in S .
Ergo punctum I erit ad hyperbolam, cujus asymptoti PV, VO.

Fig. 80.



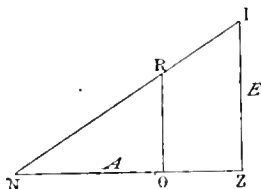
Rectangulo enim $Dpl. - R$ in S æquetur, sumpto quovis puncto X et ductâ parallelâ XY , rectangulum VXY , et per punctum Y , circa asymptotos PV , VO , hyperbole describatur : per punctum I transibit, nec est difficilis in quibuslibet casibus analysis aut constructio.

SEQUENS æqualitatum localium gradus est, quum $Aq.$ vel æquatur $Eq.$, vel est in ratione data ad $Eq.$, vel etiam $Aq. + A$ in E est ad $Eq.$ in data ratione; denique hic casus omnes æquationes comprehendit intra metam quadratorum, quarum homogenea omnia vel a quadrato A , vel a quadrato E , vel a rectangulo A in E afficiuntur.

His omnibus casibus punctum I est ad *lineam rectam*, cujus rei demonstratio facillima.

Sit NZ quad. + NZ in ZI ad ZI quad. in ratione data (*fig. 81*).

Fig. 81.



Ducatur quævis parallela OR: quadratum NO + NO in OR erit ad OR quadratum in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I erit ad rectam positione $<$ datam $>$.

[Sumatur enim quodvis punctum, ut O, et fiat data ratio quadrati

$NO \neq NO$ in OR ad OR quadratum. Juncta NR dabitur positione et satisfaciet proposito] ⁽¹⁾, idemque continget in quibushbet aequationibus, quarum omnia homogenea a potestatibus ignotarum vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosius percurrere.

Si potestatibus ignotarum vel rectangulis sub ipsis admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadet constructio : singulos casus construimus breviter et demonstramus.

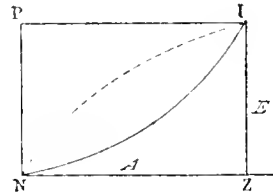
Si

$$Aq. = \text{aequatur} = D \text{ in } E,$$

punctum I est ad *parabolam*.

Fiat NP parallela ZI (fig. 82), et circa diametrum NP describatur

Fig. 82.



parabole, cujus rectum latus recta D data, et applicatae sint parallelae NZ : punctum I erit ad parabolam hanc positione datam.

Ex constructione rectangulum sub D in NP aequabitur quadrato PI , hoc est, rectangulum sub D in IZ aequabitur quadrato NZ , ideoque :

$$D \text{ in } E = \text{aequabitur} = Aq.$$

Ad hanc aequationem facillime reducentur omnes in quibus $Aq.$ miscetur homogeneis sub datis in E , aut $Eq.$ homogeneis sub datis in A .

⁽¹⁾ La démonstration mise entre crochets est suspecte à divers titres ; si elle n'a pas été interpolée, on ne peut guère la considérer que comme un reste d'une première rédaction de Fermat.

idemque continget, licet homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit

$$Eq. = \text{æquale} \quad D \text{ in } t.$$

In præcedenti figura, vertice N, circa diametrum NZ, describatur parabole, cujus rectum latus sit D , et applicatæ rectæ NP parallelæ : præstabit propositum, ut patet.

Ponatur

$$Bq. - tq. = \text{æq.} \quad D \text{ in } E.$$

Ergo

$$Bq. - D \text{ in } E = \text{æquabitur} \quad tq.$$

Applicetur $Bq.$ ad D et sit æquale D in R . Ergo

$$D \text{ in } R - D \text{ in } E = \text{æquabitur} \quad tq.,$$

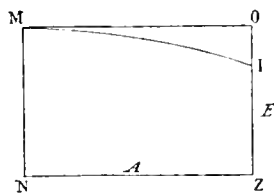
ideoque

$$D \text{ in } (R - E) = \text{æquabitur} \quad tq.$$

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem : recta quippe $R - E$ succedet ipsi E .

Fiat quippe (fig. 83) NM parallela ZI et æqualis R , et per punctum M ducatur MO parallela NZ : datur punctum M, et recta MO positione. In

Fig. 83.



hæc constructione, OI æquatur $R - E$: ergo D in OI æquatur NZ quad., sive MO quad. Vertice M, circa diametrum MN, descripta parabole, cujus rectum latus D , et applicatæ ipsi NZ parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

Si

$$Bq. + tq. = \text{æq.} \quad D \text{ in } E,$$

$$D \text{ in } E - Bq. = \text{æquabitur} \quad tq.,$$

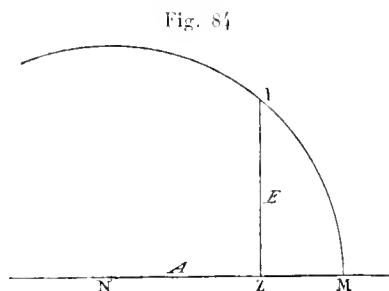
etc. ut supra. Similiter omnes æquationes ab E et $Aq.$ affectæ constructur.

Sed $Aq.$ miscetur sæpe $Eq.$ et homogeneis omnino datis.

$$Bq. - 1q. \text{ æquetur } Eq. ;$$

punctum I est ad *circulum* positione datum, quando angulus NZI est rectus.

Fiat NM (*fig. 84*) æqualis B ; circulus centro N , intervallo NM , descriptus præstabit propositum, hoc est : quodcumque punctum sump-



seris in ipsius circumferentia, ut I , quadratum ZI æquabitur quadrato NM (sive $Bq.$) — quadrato NZ (sive $Aq.$), ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab $Aq.$ et $Eq.$, et ab A vel E in datas ductis, modò angulus NZI sit rectus, et præterea coefficientes $Aq.$ æquentur coefficientibus $Eq.$

Sit

$$Bq. - D \text{ in } 1 \text{ bis} - Aq. \text{ æquale } Eq. + R \text{ in } E \text{ bis.}$$

Addatur utrimque $Rq.$, ut $E + R$ succedat E : fiet

$$Rq. - Bq. - D \text{ in } 1 \text{ bis} - 1q. \text{ æquale } Eq. + Rq. + R \text{ in } E \text{ bis.}$$

Ipsis $Rq.$ et $Bq.$ addatur $Dq.$, ut $D + A$ succedat ipsi A , et summa quadratorum $Rq.$, $Bq.$, et $Dq.$ æquetur $Pq.$ Ergo

$$Pq. - Dq. - D \text{ in } 1 \text{ bis} - 1q. \text{ æquabitur } Rq. + Bq. - D \text{ in } 1 \text{ bis} - 1q. ;$$

nam ex constructione

$$Pq. - Dq. \text{ æquatur } Rq. + Bq.$$

Si igitur loco ipsius $A + D$ sumpseris A et loco $E + R$ sumpseris E , fiet

$$Pq. - 1q. = \text{æquale} = Eq.,$$

et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducuntur, et hac via omnes propositiones secundi Libri *Apollonii De locis planis* ⁽¹⁾ construximus, et sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus : quod sane mirabile est et ab Apollonio fortasse ignorabatur.

SED

$$Bq. - 1q. \text{ ad } Eq. \text{ habeat rationem datam,}$$

punctum I erit ad *ellipsin*.

Fiat MN æqualis B , et per verticem M, diametrum NM, centrum N, describatur ellipsis, cujus applicatæ sint rectæ ZI parallelæ et quadrata applicatarum ad rectangulum sub segmentis diametri habeant rationem datam : punctum I erit ad hujusmodi ellipsin. Etenim quadratum NM — quadrato NZ æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducuntur similes in quibus $Aq.$ ex una parte opponitur $Eq.$ sub contraria affectionis nota et sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eadem et angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus; licet igitur coefficientes sint eadem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad ellipsin, et, licet immisceantur æquationibus homogenea sub datis et A vel E , fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

SI

$$Aq. + Bq. \text{ est ad } Eq. \text{ in data ratione,}$$

punctum I est ad *hyperbolen*.

Fiat NO (*fig. 85*) parallela ZI; data ratio sit eadem quæ $Bq.$ ad quadratum NR : dabitur ergo punctum R. Circa diametrum RO, per ver-

⁽¹⁾ Voir plus haut, pages 29 et 30, note »

Addatur utrinque $Aq.$, ut $A + E$ sit latus alterius ex homogeneis :
ergo

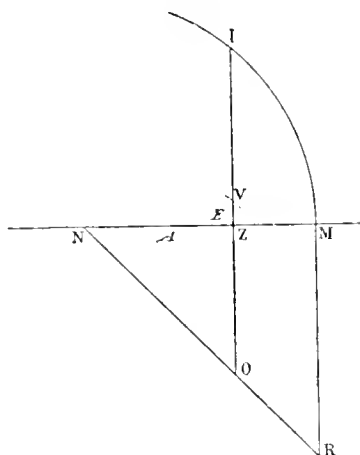
$$Bq. - Aq. \text{ æquabitur } Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis.}$$

Pro $A + E$ sumatur E , si placet, et ex præcedentibus circulus MI (fig. 86) præstet propositum, hoc est :

$$\begin{aligned} MN \text{ quad. (sive } Bq.) - NZ \text{ quad. (sive } Aq.) \\ \text{æquetur quadrato } ZI \text{ (sive quadrato abs. } A + E). \end{aligned}$$

Fiat VI æqualis NZ, sive A : ergo ZV æquatur E . In hac autem quaestione punctum V, sive extremum rectæ E , tantum inquirimus : videndum ergo et demonstrandum ad quam lineam sit punctum V.

Fig. 86.



Fiat MR parallela ZI et æqualis MN, et jungatur NR, ad quam producta IZ incidat ad punctum O. Quum MN æquetur MR, ergo NZ æquabitur ZO; sed NZ æquatur VI : ergo tota VO toti ZI est æqualis, ideoque

$$\text{quadratum } MN - \text{quadrato } NZ \text{ æquatur quadrato } VO.$$

Datur autem triangulum NMR specie : ergo quadrati NM ad quadratum NR datur ratio, ideoque et quadrati NZ ad quadratum NO dabitur ratio. Ratio igitur

$$\text{quadrati } MN - \text{quadrato } NZ \text{ ad quadratum } NR - \text{quadrato } NO$$

datur; probavimus autem

$$\text{quadratum OV aequari quadrato MN} - \text{quadrato NZ} :$$

ergo ratio quadrati NR — NO quadrato ad quadratum OV datur. Dantur autem puncta N et R, et angulus NOZ : ergo punctum V, ex superius demonstratis, est ad ellipsin.

Non absimili methodo ad superiores casus reducuntur reliqui, in quibus homogenea sub *A* in *E* homogeneis partim datis, partim sub *Aq*, aut *Eq*, immiscebuntur, aut etiam sub *A* et *E* in datas ductis, cujus rei disquisitio facillima : semper enim beneficio trianguli specie noti constructur questio.

Breviter igitur et dilucide complexi sumus quidquid de locis planis et solidis inexplicatum veteres reliquere, constabitque deinceps ad quem locum pertinebunt casus omnes propositionis ultimæ Libri I Apollonii *de locis planis* ⁽¹⁾, et omnia omnino ad hanc materiam spectantia nullo negotio detegentur.

SED LIBET coronidis loco pulcherrimam hanc propositionem adjungere, cujus facilitas statim innotescet.

Si, positione datis quocumque lineis, ab uno et eodem puncto ad singulas ducantur rectæ in datis angulis, et sint species ab omnibus ductis dato spatio æquales, punctum contingit positione datum solidum locum.

Unico exemplo fit via ad practicæ : Datis duobus punctis N, M (*fig.* 87), inveniendus locus a quo si jungas rectas IN, IM, quadrata rectarum IN, IM ad triangulum INM datam habeant rationem.

Recta NM æquetur *B*, et recta ZI, ad angulos rectos, dicatur *E* terminus; NZ dicatur *A* : ergo, ex artis præceptis,

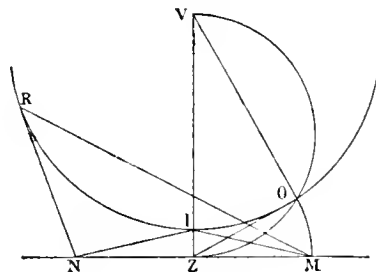
$$Aq. \text{ bis} + Bq. - B \text{ in } A \text{ bis} + Eq. \text{ bis} \quad \text{ad rectangulum } B \text{ in } E$$

habet rationem datam et, resolvendo hypostases ex jam traditis præceptis, ita procedet constructio :

⁽¹⁾ Voir plus haut, p. 27, la note sur le sens qu'il faut attribuer à cette proposition d'Apollonius.

NM bifariam secetur in Z; a puncto Z excitetur perpendicularis ZV, et fiat data ratio eadem quæ ZV quadruplæ ad NM: descripto semicirculo VOZ super VZ ⁽¹⁾ applicetur ZO æqualis ipsi ZM, et junctâ VO, centro V, intervallo VO, describatur circulus OIR, in quo sumatur

Fig. 87.



quodlibet punctum, ut R, et jungantur rectæ RN, RM : Aio quadrata RN, RM ad triangulum RNM esse in data ratione.

Hæc inventio, si libros duos *de locis planis* a nobis dudum restitutos præcessisset, elegantiores sane evasissent localium theorematum constructiones : nec tamen præcocis licet et immaturi partûs nos adhuc pœnitet, et informes ingenii fœtus posteris non invidere scientiæ ipsius quadamtenus interest, cujus opera primo rudia et simplicia novis inventis et roborantur et augescunt. Imo et studiosorum interest latentes ingenii progressus et artem sese ipsam promoventem penitus habere perspectam.

APPENDIX AD ISAGOGEN TOPICAM,

CONTINENS SOLUTIONEM PROBLEMATUM SOLIDORUM PER LOCOS.

Patuit methodus qua lineæ locales deteguntur : inquirendum restat qua ratione problematum solidorum solutio possit ex supradictis ele-

⁽¹⁾ *Construisez* : ZO, æqualis ipsi ZM, applicetur semicirculo VOZ, descripto super VZ. Fermat veut dire que, dans le demi-cercle VOZ, il faut inscrire une corde ZO égale à ZM.

gantissime derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia; infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfiat in locis.

Commodissime igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur : secant quippe se invicem due lineæ locales positione datæ, et punctum sectionis, positione datum, quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit.

Exemplis breviter et dilucide res explicatur. Proponatur

$$1c. + B \text{ in } 1q. \quad \text{æquari} \quad Zpl. \text{ in } B.$$

Commode utraque æqualitatis pars potest æquari solido $B \text{ in } A \text{ in } E$, ut per divisionem istius solidi, illinc per A , hinc per B , res deducatur ad locos.

Quum igitur

$$1c. + B \text{ in } 1q. \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } 1 \text{ in } E,$$

ergo

$$1q. + B \text{ in } A \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } E,$$

et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius E ad parabolam positione datam.

Deinde quum

$$Zpl. \text{ in } B \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } 1 \text{ in } E,$$

ergo

$$Zpl. \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ in } E,$$

et erit, ex nostra methodo, extremitas ipsius E ad hyperbolam positione datam.

Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam : ergo dabitur positione, et est facilis ab analysi ad synthesis regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis : constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab A affectis, ex altera solido omnino dato vel etiam cum solidis ab A vel $Aq.$ affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadratoquadraticis :

$$1qq. - Bs. \text{ in } 1 + Zq. \text{ in } 1q. \quad \text{æquetur} \quad Dpp.$$

Ergo

$$Aq. \quad \text{æquabitur} \quad Dpp. - Bs. \text{ in } 1 - Zq. \text{ in } 1q.$$

Æquentur hæc duo homogenea $Zq. \text{ in } Eq.$

Quum igitur

$$Aq. \quad \text{æquetur} \quad Zq. \text{ in } Eq.,$$

ergo, per subdivisionem quadraticam,

$$1q. \quad \text{æquabitur} \quad Z \text{ in } E,$$

et erit extremitas E ad parabolē positione datam.

Deinde, quum

$$Dpp. - Bs. \text{ in } 1 - Zq. \text{ in } 1q. \quad \text{æquetur} \quad Zq. \text{ in } Eq.,$$

omnibus per $Zq.$ divisīs,

$$\frac{Dpp. - Bs. \text{ in } 1}{Zq.} = 1q. \quad \text{æquabitur} \quad Eq.,$$

et erit, ex nostra methodo, extremitas E ad circulum positione datum.

Sed est et ad parabolē positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadratoquadraticæ : expurgabuntur enim, methodo Viætæ (Cap. I. *De emendatione*)⁽¹⁾, ab affectione sub cubo et, quadratoquadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolē, circulum vel hyperbolē solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum *inventio duarum mediarum in continua proportionē*.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ. Fiet

$$1c. \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } D,$$

si major mediarum ponatur A .

(1) Voir page 132 de l'édition de Schooten. Il s'agit de la méthode aujourd'hui vulgaire.

Sed parabole etiam quam supra descripsimus dabitur positione et per idem punctum M transit : datur igitur punctum M positione, a quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, et recta OV, major duarum continue proportionalium quas querimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem paraboles et hyperboles.

Si ad quadratoquadrata lubeat questionem extendere, omnia ducantur in A :

$$Aqq. = \text{æquabitur} \quad Bq. \text{ in } D \text{ in } A.$$

Sequentur singula homogenea, juxta superiorem methodum, Bq. in Eq.; fiet duæ æqualitates, nempe

$$Aq. = \text{æq.} \quad B \text{ in } E \quad \text{et} \quad D \text{ in } A = \text{æq.} \quad Eq.,$$

quæ singulæ dabunt parabolæ positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio et posterior sunt apud Eutocium in Archimædem ⁽¹⁾, et huic methodo facile redduntur obnoxia.

Abeant igitur *climacticæ* illæ *parapleroses* Vietæ ⁽²⁾, quibus æquationes quadratoquadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana. Pari enim elegantia, facilitate et brevitate solvuntur, ut jam patuit, perinde quadratoquadraticæ ac cubicæ questiones, nec possunt, opinor, elegantius.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en *constructionem omnium problematum cubicorum et quadratoquadraticorum per parabolæ et circum.*

Ponatur

$$Aqq. - Zs. \text{ in } A = \text{æquari} \quad Dpp.;$$

ergo

$$Aqq. = \text{æquabitur} \quad Zs. \text{ in } A + Dpp.$$

⁽¹⁾ Commentaire sur le Traité de la sphère et du cylindre, II, 2, dans les Œuvres d'ARCHIMÈDE: édition Torelli, page 142; édition Heiberg, vol. III, pages 93-99. Ces deux constructions sont attribuées par Eutocius à Ménechme, l'inventeur présumé des coniques.

⁽²⁾ De emendatione æquationum, Cap. VI, pages 140 et suivantes de l'édition de Schooten. Il s'agit de la solution algébrique des équations du quatrième degré

Figatur quadratum abs $Aq.$ — $Bq.$ aut alio quovis quadrato : fiet quadratum

$$Uqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } 4q. \text{ bis.}$$

Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus

$$Bqq. - Bq. \text{ in } 4q. \text{ bis ;}$$

fiet

$$Uqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } 4q. \text{ bis} = \text{æquale}$$

$$Bqq. - Bq. \text{ in } 4q. \text{ bis} + Zs. \text{ in } 4 + Dpp.$$

Sit

$$Bq. \text{ bis} = \text{æquale} = Xq.,$$

et singulis homogeneis, sive partibus æqualitatis, æquetur $Xq.$ in $Eq.$: fiet illine, per subdivisionem quadraticam,

$$Uq. - Bq. = \text{æquale} = V \text{ in } E,$$

ideoque punctum extremum E erit ad parabolam, ex nostra methodo : istinc fiet

$$\frac{Bqq.}{\sqrt{q.}} - Uq. + \frac{Zs. \text{ in } 4}{\sqrt{q.}} + \frac{Dpp.}{\sqrt{q.}} = \text{æquale} = Eq.,$$

ideoque, ex nostra methodo, punctum extremum E erit ad circulum.

Descriptione igitur paraboles et circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillime ad omnes casus tam cubicos quam quadrato-quadraticos extenditur. Curandum enim tantum ut ex una parte sit $Uqq.$, ex altera quælibet homogenea, modo non afficiantur ab $Ac.$: at, per expurgationem Vietæam, omnes æquationes quadratoquadraticæ ab affectione sub cubo liberantur : ergo eadem erit in omnibus methodus.

Quum autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione sub quadrato per methodum Vietæam (¹), homogeneis omnibus in A ductis, fiet æquatio quadratoquadratica cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo, ideoque solvetur per superiorem methodum.

Id solum in secunda æqualitate curandum est ut $Aq.$ ex una parte,

(¹) *De emendatione æquationum*, Cap. I, pages 130 et suivantes de l'édition de Schooten.

ex altera $Eq.$, sub contraria affectionis nota reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus,

$$Aqq. \quad \text{æquale} \quad Zpl. \text{ in } 1q. - Zs. \text{ in } D.$$

Fingatur quodvis quadratum abs $Aq.$ — quovis quadrato dato, ut $Bq.$, fiet

$$1qq. + Bqq. - Bq. \text{ in } 1q. \text{ bis,}$$

Adjiciatur utrique æqualitatis parti, ad supplementum.

$$Bqq. - Bq. \text{ in } 1q. \text{ bis}$$

fiet

$$1qq. + Bqq. - Bq. \text{ in } 1q. \text{ bis} \quad \text{æquale} \quad Bqq. - Bq. \text{ in } 1q. \text{ bis} + Zpl. \text{ in } 1q. - Zs. \text{ in } D.$$

Ut igitur commoda fiat divisio, in secunda æqualitate sumenda differentia inter $Bq. \text{ bis}$ et $Zpl.$, quæ sit, verbi gratia, $Nq.$, et utraque æqualitatis pars æquanda $Nq. \text{ in } Eq.$, ut illinc fiat

$$1q. - Bq. \quad \text{æquale} \quad N \text{ in } E,$$

istinc,

$$\frac{Bqq.}{Nq.} - 1q. - \frac{Zs. \text{ in } D}{Nq.} \quad \text{æquale} \quad Eq.$$

Advertendum deinde $Bq. \text{ bis}$ debere præstare $Zplano$, alioquin $Aq.$ non afficeretur signo defectus et pro circulo inveniremus hyperbolam. Cui promptum remedium : $Bq.$ enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus $Zplano$ nullius est negotii sumere. Constat autem, ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo $+$, in altera aliud quadratum ignotum signo $-$.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit

$$1c. \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } D,$$

et

$$1qq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } D \text{ in } 1.$$

Adjiciatur utrinque $Bqq.$ — $Bq.$ in $Aq.$ bis :

$$Uq. - Bqq. - Bq. \text{ in } Uq. \text{ bis} = \text{aequabitur} = Bqq. + Bq. \text{ in } D \text{ in } U - Bq. \text{ in } Uq. \text{ bis.}$$

Sit

$$Bq. \text{ bis} = \text{aequale} = Nq.,$$

et singula aequalitatis partes aquantur $Nq.$ in $Eq.$: fiet illinc

$$Uq. - Bq. = \text{aequale} = V \text{ in } E,$$

ideoque extremum E erit ad parabolam; istinc fiet

$$Bq. \frac{1}{2} + D \frac{1}{2} \text{ in } U - Uq. = \text{aequale} = Eq.,$$

ideoque extremum E erit ad circulum.

Qui haec adverterit, frustra questionem mesolabii, trisectionis angularis et similes, tentabit deducere ex planis, hoc est, per rectas et circulos expedire.

ISAGOGÉ AD LOCOS AD SUPERFICIEM,

CARISSIMO DOMINO DE CARCAVI ⁽¹⁾.



Isagogen ad locos planos et solidos perficit tradenda τόνων πρός ἐπιφανείων ἐπιδείξις. Hanc veteres indicarunt tantum, sed neque generalibus præceptis docuerunt, neque aliquo saltem nobili exemplo adumbrarunt, nisi in iis forsitan sepultæ jamdiu Geometriæ monumentis deliteant, in quibus tot præclara veterum inventa cum blattis et tineis colluctantur dudum aut omnino evanuerunt.

Generalem tamen huic materiæ methodum non defuturam brevissima dissertatio patefaciet : pluribus enim singulas, quas summam tradidimus huc usque in Geometricis, inventiones aliquando, si suppetet otium, illustrabimus.

Quæ igitur in lineis topicis symptomata quæsiimus et demonstravimus, eadem in superficiebus planis, sphaericis, conicis, cylindricis et conoideôn aut spheroideôn quorumlibet inquirere nihil vetat, si præmittantur lemmata singulorum hujusmodi locorum constitutiva ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cet opuscule, jusqu'à présent inédit, et qui contient le premier essai connu sur la théorie générale des surfaces du second degré, est publié d'après une copie d'Arbogast, faite elle-même de seconde main.

⁽²⁾ Fermat, dont le point de départ est le Livre d'Archimède *De conoidibus et sphaeroidibus*, a bien reconnu la nécessité de généraliser la notion de la surface cylindrique, ainsi que celles des conoïdes (paraboloïdes elliptiques et hyperboloïdes à deux nappes) et sphéroïdes (ellipsoïdes) d'Archimède, qui n'avait traité que des surfaces de révolution : mais il n'a pas soupçonné l'existence du paraboloïde hyperbolique ni de l'hyperboloïde à une nappe. Son erreur apparaît au lemme 5.

Proponatur ergo pro locis ad superficiem planam lemma sequens :

1. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio omnium in infinitum secantium planorum $<$ et dictæ superfici $>$ sit linea recta, superficies primum posita erit planum.*

Pro locis ad superficiem sphericam :

2. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio planorum omnium secantium et dictæ superfici sit circulus, superficies illa erit sphaera.*

Pro locis ad superficiem sphæroidis :

3. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio omnium secantium planorum et dictæ superfici sit quandoque circulus, quandoque ellipsis, et nihil præterea, superficies illa erit sphæroïds.*

Pro locis ad conoides parabolicos aut hyperbolicos :

4. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones (ut supra) sint quandoque circulus, quandoque ellipsis, quandoque parabole aut hyperbole, et nihil præterea, superficies primum posita erit conois parabolicus aut hyperbolicus.*

Pro locis ad conicas superficies :

5. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones sint quandoque lineæ rectæ, quandoque circuli, quandoque ellipses, quandoque parabole aut hyperbole, et nihil præterea, superficies primum posita erit conus.*

Pro locis ad superficiem cylindricam :

6. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones sint quandoque lineæ rectæ, quandoque circuli, quandoque ellipses, et nihil præterea, superficies primum posita erit cylindrus.*

Quia tamen sæpissime occurrunt loci in quibus sectiones sunt lineæ rectæ, parabole aut hyperbole et nihil præterea (quod ipsa statim quæs-

tionis analysis indicabit), conveniens $\langle \text{est} \rangle$ et necessaria omnino huic disputationi *nova cylindrorum constitutio, in quibus bases inter se parallele sint parabole aut hyperbole, et latera, bases hujusmodi connectentia, sint lineæ rectæ, inter se parallele*, ut accidit in cylindris communibus. Ita enim fiet ut nulla omnino cylindrorum hujusmodi per planum sectio det circulos aut ellipses, eruntque aut scaleni aut recti ad imitationem communium, prout analysis topica propositæ quæstionis exposcet.

Hos autem cylindros problemata ipsa topica necessarios innunt : quod addendum, ne videatur otiosa hujusmodi $\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\tau\omicron\varsigma$ expositio et inventio.

Imo et priusquam ulterius pergās, non omnino satisfacit huic operi Archimedeæ sphaeroideon et conoideon constructio ⁽¹⁾ : scalenos enim, perinde ac rectos, quæstiones ipsæ representabunt.

Ex præmissis sequuntur pulcherrimi primò *ad superficiem sphericam* loci :

Si a quocumque punctis datis in quibuscumque planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et sint quadrata quæ ab omnibus fiunt dato spatio equalia, punctum ad inflexionem erit ad superficiem sphericam sive sphaeram positione datam. — Sphaeram enim vocare possumus, ad imitationem Euclidis et veterum Geometrarum qui $\sigma\acute{\upsilon}\lambda\lambda\omicron\nu$ non ipsius circuli $\tau\omicron\ \epsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{\omicron}\nu$, sed circumferentiam ipsam appellarunt : superficiem sane hujusmodi punctum quampiam describet.

Exponatur quodvis planum positione datum et in illo, juxta præcepta locorum planorum et solidorum alias tradita, quærat locus ad quem a punctis datis inflexarum quadrata æquentur spatio dato.

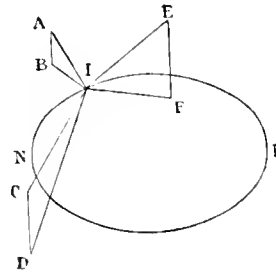
Hoc autem est facile : sit factum et locus in plano exposito sit curvæ NIP (*fig.* 89). In illud planum, a punctis A, E, C datis ex hypothesis, demittantur normales AB, EF, CD. Quum igitur planum hoc sit positione datum, dabuntur in illud a punctis A, E, C datis demissæ

⁽¹⁾ Voir la note 2 de la page 111 et la Préface du Traité d'Archimède *Des conoïdes et sphéroïdes* (éd. Torelli, pages 257 à 259 ; éd. Heiberg, vol. I, pages 274 et suiv.).

normales AB, EF, CD; dabuntur et puncta B, F, D in quibus dictæ normales plano exposito occurrunt. Sumatur in quæsita linea locali NIP quodvis punctum, ut I, et jungantur rectæ AI, BI, EI, IF, CI, DI.

Quum igitur a punctis datis A, C, E ad punctum I lineæ localis per-
tingant rectæ AI, EI, CI, earum quadrata comprehendunt spatium
datum. Si igitur ab eis quadratis auferas normalium AB, EF, CD qua-
drata, quæ jam probavimus data esse, supererunt quadrata BI, FI, DI.

Fig. 89.



quorum summa proinde data est. Dantur etiam in exposito plano
puncta B, F, D, ut similiter probatum est. Quum itaque a punctis B,
F, D, datis in eodem plano, inflectantur rectæ ad locum in eodem
etiam plano, et sint quadrata inflexarum, ut BI, FI, DI, æqualia spatio
dato, patebit, ex Apolloniano (*) pridem restituto theoremate, locum
NIP esse circulum positione datum, similisque omnino analysis in
quovis alio plano exposito locum habebit.

Quum igitur plana omnia exposita dent circulos locales in infinitum,
ergo superficies primum quæsita, ex vi secundi lemmatis, erit sphaera.

Quum enim superficiem localem proposito satisfaciendam quæramus,
quid vetat imaginari superficiem quæsitam plano exposito sectam? At
sectio circulus esse duntaxat potest; quum enim circulus, ut jam de-
monstravimus, satisfaciat loco cui etiam superficies integra satisfacere
debet, patet circulum in dicta superficie locali necessario collocandum.
Constat igitur superficiem localem in specie proposita, dum planis
secatur, dare infinitos circulos ac proinde esse sphaeram.

* Four plus haut Apollonius de locis planis Libr. II. prop. V, page 37.

Eàdem ratione demonstrabuntur et sequentes loci :

Si a quocumque punctis in uno vel diversis planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et quadrata, quæ ab aliquibus inflexarum fiunt, ad quadrata quæ a reliquis, sint vel in data ratione vel in data differentia vel dato majora aut minora quam in ratione, punctum ad inflexionem erit ad sphaeram positione datam.

Non dissimili artificio pulcherrima in infinitum superficiæ sphericæ symptomata deteguntur.

Si sint quotlibet plana positione data, et a puncto quodam in data plana demittantur rectæ in angulis datis, quarum quadrata omnia simul sumpta æquantur spatio dato, punctum erit ad superficiem sphaeroidis positione dati.

Fiat analysis et exponatur, ut docet methodus, planum quodlibet positione datum, in quo (juxta præcepta locorum planorum et solidorum quæ in uno duntaxat plano olim expendebamus) quæeratur linea localis a cujus puncto quolibet in plana data demissarum in angulis datis quadrata æquantur spatio dato.

Facillima statim evadet constructio : quum enim planum expositum detur positione non secus ac plana data, ergo et communes plani expositi et datorum sectiones similiter dantur. Commodam igitur in analyticis denominationem accipiunt rectæ a quovis puncto plani expositi in plana data demissæ. Harum quadrata si jungas et æques spatio dato, exhibebit analysis in plano exposito circulos tantum aut ellipses locales, neque in quovis alio plano positione dato alium methodus locum poterit exhibere, ut ipse analyseos progressus indicabit.

Patet itaque, ex tertio lemmate, locum quæsitum, quum circulos det tantum aut ellipses, esse sphaeroiden.

Si quadratorum hujusmodi pars quævis assignata ad reliquam sit in data differentia vel in data ratione vel dato major aut minor quam in ratione, fient superficies aut sphaeroidis aut conoidis aut conicæ aut cylindricæ etc., prout positio datorum planorum expostulabit, idque statim solerti analyseos filo deprehendetur.

Verbi gratia, si sint in data ratione, fient superficies, ut plurimum, conoideon; si vero communes sectiones planorum datorum ad unum punctum concurrant, fient superficies mere conicæ; et, si sectiones planorum datorum sint inter se parallelæ, fient superficies mere cylindricæ, hoc est, vel nostrorum vel communium cylindrorum.

• Usus omnia statim patefaciet : generalia quippe summam tradenda sunt, nec frequentibus nimis exemplis methodi perspicuitas obruenda.

Ultimum plano locali destinavimus exemplum, quod primam fortasse sedem debuerat occupare.

Si sint quotlibet plana positione data, et a puncto quovis in dicta plana demittantur rectæ in datis angulis, et sit rectarum omnium demissarum summa æqualis rectæ datæ, punctum erit ad planum positione datum.

Secuntur quippe, ex superiori methodo, plana data a plano quolibet positione dato, et in eo, juxta methodum locorum planorum jam traditam, queratur locus propositioni satisfaciens. Erit ille linea recta, ut constabit ex analysi, et in quibuscumque per plana sectionibus idem continget. Patet igitur, ex primo lemmate, locum quæsitum esse superficiem planam.

Si hujusmodi rectarum pars quævis assignata ad reliquam sit in data differentia vel ratione, vel datâ major quam in ratione, punctum erit similiter ad superficiem planam positione datum.

Imo et in superioribus questionibus, si plana essent inter se parallelæ, superficies localis esset plana, quod vix erat ut admoneremus.

CORONIS loco addere libet et huic etiam aptare operi insigne illud, de loco ad tres $<$ et $>$ quatuor lineas Apollonii ⁽¹⁾, ἐπιζεύκτην.

⁽¹⁾ Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt (éd. Hultsch, Berlin, 1876-1878), Livre VII, pages 674-681.

Pappus (p. 678, l. 15 à 25) définit le lieu à trois ou quatre lignes, à propos d'un passage de la Préface des *Coniques* d'Apollonius, qu'il reproduit et qu'il discute. Au reste, l'invention du problème est antérieure au géomètre de Perge et doit remonter au moins à Aristée l'ancien, qui en avait probablement abordé l'analyse dans ses Livres perdus *Des lieux*.

Si sint tria plana positione data, et a puncto quodam in dicta plana demittantur rectæ in datis angulis, et sit quod fit a duabus ductis rectangulum ad quadratum reliquæ in ratione data, punctum erit vel ad planum vel ad sphaeram vel ad sphæroiden vel ad conoides vel etiam ad superficies conicam aut cylindricam (veterem aut novam), prout plana data positionem sortita fuerint.

Nec absimilis in quatuor planis inventio, ut cuilibet obvium.

Casus, determinationes, infinita problemata localia seu maxis theorematum, quæ brevitatis causa omisimus, lemmatum præmissorum demonstrationes, et reliqua quæ diligentius forsitan fuerant explicanda, sedulus et accuratus Geometra, cui hæc venerint in manus, facillime supplebit, neque latebit deinceps arduæ, ut videbatur, materiæ proclivis intelligentia.

Tolosæ, 6 januarii 1643.

solides; Apollonius reprochait à Euclide de n'avoir, dans ses *Coniques*, donné qu'une synthèse incomplète.

La question était redevenue célèbre depuis l'apparition de la *Géométrie* de Descartes, où elle joue un rôle capital; voir notamment pages 374 et suivantes de l'édition originale (*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*, A Leyde, de l'imprimerie de Jan Maire, CLOECXXXVII. Avec privilège; pages 51 à 58 de l'édition de Paris, Hermann, 1886. Mais Fermat avait lui-même abordé dès longtemps ce problème : voir plus haut, pages 87 à 89.



DE SOLUTIONE
PROBLEMATUM GEOMETRICORUM

PER CURVAS SIMPLICISSIMAS

ET UNICUIQUE PROBLEMATUM GENERI PROPRIE CONVENIENTES.

DISSERTATIO TRIPARTITA.

PARS I.

Ut constet Cartesium in Geometricis etiam hominem esse, quod paradoxum merito forsán quis dixerit, videant subtiliores Cartesiani an mendum contineat linearum curvarum in certas classes aut gradus Cartesiana distributio, et an probabilior et commodior secundum veras Analyseos Geometricæ leges debeat assignari. Quod sine dispendio famæ tanti et tam celebris viri exsecuturos nos censemus, quum Cartesii et Cartesianorum omnium intersit veritatem, ejus fautores se non immerito jactant acerrimos, licet ipsorum placitis aliquantisper adversetur, omnibus aut (si generale hoc nimis) Geometris saltem et Analystis fieri manifestam.

Problematum geometricorum in certas classes distributio, non solum veteribus, sed et recentioribus necessaria visa est Analystis. Proponatur videlicet

$$A + D \text{ æquari } B,$$

aut

$$A \text{ quadratum} + B \text{ in } A \text{ æquari } Z \text{ plano.}$$

Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum suis ter-

minis non excedit, posterior autem lateris ignoti secundam potestatem sive quadratum continet, primum et simplicius problematum genus constituunt. Ea vero sunt problemata quæ plana Geometris dici consueverunt.

Secundum problematum genus illud est in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem, hoc est ad cubum vel ad quadratoquadratum, pertingit. Ratio autem cur duæ potestates proximæ, licet diversi gradus sint, unum tamen tantum constituent problematum genus, hæc est, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad simplices aut laterales facili, quæ et veteribus et novis cognita est, methodo, ideoque per regulam et circinum nullo negotio resolvuntur. Æquationes autem quarti gradus sive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertii gradus sive cubicas beneficio novæ, quam Vieta et Cartesius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta subtilem illam et sibi peculiarem climacticam paraplerosin destinavit, ut apud eum videre est cap. 6 libelli *De emendatione æquationum*, nec absimili in pari casu usus est artificio Cartesius ⁽¹⁾, licet aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam sive æquationem sexti gradus ad æquationem quinti deprimet, licet aliquanto difficilior, Vietaus aut Cartesianus Analysta ⁽²⁾. Ex eo autem quod in prædictis casibus, in quibus una tantum ignota quantitas invenitur, æquationes graduum parium ad æquationes graduum imparium proxime minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronunciavit Cartesius paginâ 323 Geometriæ linguâ gallicâ ab ipso conscriptæ ⁽³⁾.

(1) VIÈTE, édition Schooten, pages 140 et suivantes. — DESCARTES (*Géométrie*), édition de 1637, pages 383 et suivantes; édition de 1886 (Paris, Hermann), pages 65 et suivantes.

(2) Cette assertion est singulière : Fermat a-t-il cru, d'après le passage de Descartes rapporté dans la note qui suit, que son rival possédait le secret d'une pareille réduction ?

(3) DESCARTES (*Géométrie*, édition de 1637, p. 323) : « Au reste, je mets les lignes courbes qui font monter cette équation jusqu'au quarré de quarré, au même genre que

Hujusmodi vero sunt æquationes omnes linearum curvarum constitutivæ : in his enim non solum prædicta reductio vel depressio non succedet, ut Cartesius affirmabat, sed eam omnino impossibilem Analystæ experientur. Proponatur, verbi gratia, æquatio paraboles quadratoquadraticæ constitutiva, in qua

$$A \text{ quadratoquadratum} = Z \text{ solido in } E;$$

qua ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ parapleroseos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam assignamus : hæc enim levia et prorsus arbitraria cur immutarit Cartesius ⁽¹⁾, non video.

Ut autem pateat disquisitionem hanc aut animadversionem non esse otiosam et inutilem, suppetit methodus universalis qua problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem ascendat, illud per sectiones conicas quæ sunt secundi gradus expediemus; sed si æquatio ad quintam vel ad sextam potestatem ascendat, tunc solutionem per curvas tertii gradus possumus exhibere; si æquatio ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, solutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, et sic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantum, sed de re agitari questionem.

Proponatur in exemplum

$$A \text{ cub. cub.} + B \text{ pl. sol. in } A = \text{æquari} = Z \text{ sol. sol.},$$

aut, si velis,

$$A \text{ qu. cub.} + B \text{ pl. pl. in } A = \text{æquari} = Z \text{ pl. sol.};$$

celles qui ne la font monter que jusqu'au cube; et celles dont l'équation monte au quarré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide, et ainsi des autres: dont la raison est qu'il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au quarré de quarré, et au sursolide toutes celles qui vont au quarré de cube: de façon qu'on ne doit pas les estimer plus composées. » (Page 26 de l'édition de 1886.)

(1) On sait que Descartes fut le premier à désigner les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet; c'est également à lui que remonte l'emploi, en Algèbre, dans les Ouvrages imprimés, des minuscules italiques.

in utroque hoc casu problema solvemus per curvas tertii gradus seu cubicas, quod et fecit Cartesius ⁽¹⁾. Sed si proponatur

$$A qu. cub. cub. + B pl. pl. sol. in A \quad \text{æquari} \quad Z pl. sol. sol.,$$

aut

$$A qu. qu. cub. + B sol. sol. in A \quad \text{æquari} \quad Z pl. pl. sol.,$$

tunc problema solvemus per curvas quarti gradus seu quadratoquadraticas, quod nec fecit nec fieri posse existimavit Cartesius ⁽²⁾, quum in hoc casu ad curvas quinti vel sexti gradus necessario recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad solutionem cujusvis problematis curvas compositas nimis et graduum elatiorum assumit, omissis propriis et simplicioribus, quum jam saepe et a Pappo ⁽³⁾ et a recentioribus determinatum sit non leve in Geometria peccatum esse quando problema ex improprio solvitur genere. Quod ne accadat, corrigendus est Cartesius et singula problemata suis, hoc est propriis et naturalibus, sedibus restituenda.

Sed et pag. 322 ⁽⁴⁾ idem Cartesius diserte asserit curvas ex intersectione regulæ et alterius aut rectæ aut curvæ oriundas esse semper ela-

⁽¹⁾ *Géométrie de Descartes*, édition de 1637, pages 403 et suivantes; édition de 1886, pages 80 et suivantes.

⁽²⁾ *Géométrie de Descartes*, édition de 1637, page 389 : « Si la quantité inconnue a trois ou quatre dimensions, le problème pour lequel on la cherche est solide, et si elle en a cinq ou six, il est d'un degré plus composé, et ainsi des autres. » (Page 71 de l'édition de 1886.)

Le reproche spécial adressé ici à Descartes par Fermat n'est certainement pas fondé : Descartes a bien eu le tort de considérer comme d'un seul genre n les courbes de degré $2n-1$ et $2n$; mais, pour résoudre un problème de degré $2n-1$ ou $2n$, il ne demandait que des courbes de degré n . Voir page 308 de l'édition de la *Géométrie* de 1637, page 10 de l'édition de 1886. Fermat a été induit en erreur en croyant retrouver partout dans le langage de Descartes les conséquences de l'idée erronée qu'il se proposait de relever.

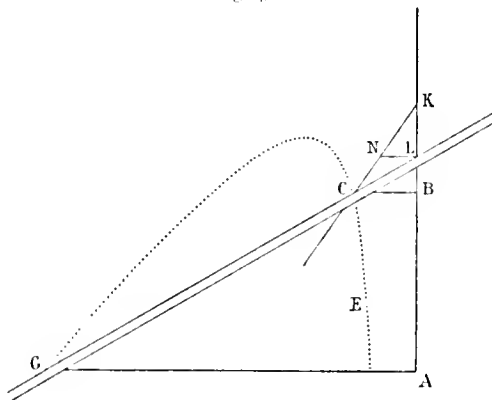
⁽³⁾ PAPPUS, Livre IV, 59; édition Hultsch, page 270, lignes 27 et suivantes.

⁽⁴⁾ Édition de 1886, page 20 : « Mais si au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en est une du second qui termine le plan CNKL, on en décrira par son moyen une du troisième, ou si c'en est une du troisième, on en décrira une du quatrième, et ainsi à l'infini. »

Descartes suppose que le plan CNKL se meut parallèlement à lui-même, le point L parcourant la droite fixe AB. La courbe décrite est le lieu de l'intersection de la droite GL, déterminée par le point fixe G et le point mobile L, avec une courbe CK donnée sur le plan mobile. Si l'on suppose que les x soient parallèles à AB, les y à AG, que l'équation de la courbe donnée, en prenant L pour origine des axes, soit $F(x, y) = 0$; si enfin l'on

tioris gradus aut generis, quam est recta aut curva in figura pag. 321 (*fig. 90*), ex qua derivantur. Intelligatur, si placet, in locum ipsius rectæ CNK, in dicta figura pag. 321, substitui parabolam cubicam cujus vertex sit punctum K et axis indefinitus KLBA, et cætera construantur

Fig. 90.



ad mentem Cartesii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ constitutivam esse sequentem

4 cub. ex una parte, et B quad. in E ex altera.

Experiere autem statim curvam EC ex hujusmodi positione provenientem ad æquationem tantum quadratoquadraticam ascendere : ergo curva quadratoquadratica est elatioris gradus aut generis quam curva cubica, secundum prædictam Cartesii definitionem, quum tamen contrarium pag. 323 (¹) expresse idem Cartesius definierit, curvam nempe

pose $AG = a$, il est aisé de voir que l'équation de la courbe décrite sera, en prenant A pour origine,

$$F\left(\frac{xy}{a-y}, y\right) = 0.$$

Or, l'assertion de Descartes revient à dire que, si l'équation de la courbe donnée est du degré $2n+1$ ou $2n$, l'équation de la décrite sera du degré $2n+1$ ou $2n+2$. Il est singulier que, au lieu de relever ce *lapsus* évident, Fermat se soit au contraire attaché à montrer que, dans tel cas particulier, le degré de la courbe décrite pouvait être encore moins élevé que celui indiqué par Descartes.

(¹) Voir la note 3 de la page 119.

quadratoquadraticam et curvam cubicam esse unius et ejusdem gradus aut generis.

Methodum autem nostram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam et quartam potestatem continent, ad secundum curvarum gradum : quæ quintam et sextam potestatem, ad tertium : quæ septimam et octavam, ad quartum reducimus, et eo in infinitum ordine, exhibere non differemus quotiescunque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoscunque vel etiam Cartesianos in præjudicium veritatis dissimulare.

Nec moveat problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt et quæ ejusdem cum problematis primi gradus sint speciei et plana dicuntur, circulis, hoc est curvis secundi gradus, indigere; suum enim et proprium huic objectioni responsum non deerit, quum methodum nostram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes absolventem proferemus.

DISSERTATIONIS

PARS II.

Ut date publice fidei satisfiat, methodum generalem ad solvenda quaecunque problemata per curvas proprias et convenientes exhibemus. Prædictum est jam in prima Dissertationis parte problemata duorum graduum inter se proximorum, tertii verbi gratia et quarti, quinti et sexti, septimi et octavi, noni et decimi, etc., unicum tantum curvarum gradum respicere : problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam potestatem ascendunt, solvi per curvas secundi gradus; ea vero quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt, solvi per curvas tertii gradus; etc. in infinitum.

Modus autem operandi talis est : Data quævis æquatio, in qua unica tantum reperitur ignota quantitas, reducatur primo ad gradum elatior-em sive parem; deinde ab adfectione sub latere omnino liberetur. Quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneous datum ex una parte, et aliquod homogeneous incognitum,

cujus singula membra a quadrato lateris incogniti adficiuntur, ex altera. Homogeneum istud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut, in æquatione ipsius quadrati cum homogeneo incognito, elatiores quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evanescant. Cavendum etiam ut singula lateris quadratici sic effingendi homogenea a radice vel latere ignoto adficiantur, et ultimum tandem ex illis a secunda etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio divisionis simplicis ex una parte, et extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium constitutivæ, et earum intersectio solutionem problematis exhibebit, eâ qua dudum usi sumus in solutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, si placet,

$$\begin{aligned} & A cub. cub. + B in Aqu. cub. + Z pl. in Aqu. qu. \\ & + D sol. in A cub. + M pl. pl. in Aqu. \quad \text{æquari} \quad X sol. sol. : \end{aligned}$$

problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt ad hanc formam reduci possunt. Nihil enim hoc aliud est quam vel quintam potestatem ad sextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione sub A vel latere liberare, quæ omnia et Vieta ⁽¹⁾ et Cartesius ⁽²⁾ abunde docuerunt.

Effingatur itaque quadratum a latere

$$A cub. + B in A in E$$

et æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque

$$\begin{aligned} & A cub. cub. + B in Aqu. qu. in E bis + B qu. in Aqu. in E qu. \\ & \text{æquale} \quad A cub. cub. + B in Aqu. cub. + Z pl. in Aqu. qu. \\ & + D sol. in A cub. + M pl. pl. in Aqu. \end{aligned}$$

et, deleto utrimque $A cub. cub.$ et reliquis per $Aqu.$ divisus, quod ex

⁽¹⁾ VIÈTE, *De emendatione æquationum*, cap. I (éd. Schooten, p. 132).

⁽²⁾ DESCARTES, *Géométrie*, page 383 de l'édition de 1637, page 65 de l'édition de 1886.

cautione adjecta methodo semper liberum est, remanebit æquatio inter

$$B \text{ in } A \text{ cub.} + Z \text{ pl. in } A \text{ qu.} + D \text{ sol. in } A + M \text{ pl. pl.} \quad \text{ex una parte,}$$

et

$$B \text{ in } A \text{ qu. in } E \text{ bis} + B \text{ qu. in } E \text{ qu.} \quad \text{ex altera.}$$

Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam tertii gradus.

Quia autem, ut constituatur duplicata æqualitas et commode ad solutionem problematis deveniatur, æquandum etiam est quadratum a latere $A \text{ cub.} + B \text{ in } A \text{ in } E$ posteriori prioris æquationis parti, hoc est $N \text{ sol. sol.}$, ergo, per extractionem lateris quadrati, latus quadraticum $N \text{ sol. sol.}$, quod facile datur et dicatur, si placet, $N \text{ sol.}$, æquabitur

$$A \text{ cub.} + B \text{ in } A \text{ in } E,$$

quod est latus quadrati priori æquationis primum datæ parti æqualis. Habemus igitur hanc secundam æquationem

$$\text{inter } N \text{ sol.} \quad \text{et} \quad A \text{ cub.} + B \text{ in } A \text{ in } E,$$

quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt intersectionem duarum curvarum jam inventarum dare valorem ipsius A , hoc est problematis propositi solutionem?

Si problema ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, statuatur primo sub forma octavæ potestatis, deinde ab adfectione sub latere omnino liberabitur. Hoc peracto, esto itaque, post legitimam ex jam præscripta methodo reductionem,

$$\begin{aligned} A \text{ qu. cub. cub.} + B \text{ in } A \text{ qu. qu. cub.} + D \text{ pl. in } A \text{ cub. cub.} \\ + N \text{ sol. in } A \text{ qu. cub.} + M \text{ pl. pl. in } A \text{ qu. qu.} \\ + G \text{ pl. sol. in } A \text{ cub.} + R \text{ sol. sol. in } A \text{ qu.} \quad \text{æquale} \quad Z \text{ pl. sol. sol.} \end{aligned}$$

Effingetur quadratum cuilibet istius æquationis parti æquandum a latere

$$A \text{ qu. qu.} + B \frac{1}{2} \text{ in } A \text{ cub.} + D \text{ pl. in } A \text{ in } E.$$

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneous eo artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radiceis A potestates in æquatione omnino evanescant, quod perfacile est. Quadratum igitur illius lateris

si æques priori æquationis propositæ parti, deletis communibus et reliquis per *Aqu.* divisis, orietur æquatio curvæ quarti gradus constitutiva ex una parte.

Deinde, post extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primæ propositæ parte, latus *Zpl. sol. sol.*, quod *Ppl. pl.* dicere licet, æquabitur

$$Aqu. qu. + B \frac{1}{2} \text{ in } A cub. + D pl. \text{ in } A \text{ in } E;$$

hec vero æquatio dabit etiam aliam quarti gradus curvam, et harum duarum curvarum intersectio dabit valorem *A*, hoc est problematis propositi solutionem.

Notandum porro in problematis quæ ad nonam aut decimam potestatem ascendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo sint quatuor ad minus homogenea quorum beneficio evanescant tres elatiores lateris ignoti gradus; in problematis autem quæ ad undecimam aut duodecimam potestatem ascendunt, latus effigendi quadrati constare debere quinque ad minus homogeneis, ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evanescant. Perpetua autem et facilissima methodo, hanc lateris quadrati effigendi formam per solam et simplicem divisionem vel applicationem, ut verbis geometricis et in re pure geometrica utamur, expediri Analystæ experiendo deprehendent, et characterum $+$ et $-$ variatio nullum methodo præjudicium est allatura.

Quum autem problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt per extractionem lateris quadrati reducantur ad primam, ut notum est, per lineas primi gradus, hoc est rectas, expedientur, et vana evadet quam in priore Dissertationis istius parte metueramus objectio, quum extractionem radicis quadraticæ tanquam notam et obviam in quolibet problematum genere ex nostra methodo usurpandam supposuerimus.

Non latebit igitur deinceps accurata et simplicissima problematum geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit, speciei oriundos, resolutio et constructio. Variare autem curvas salvo semper et retento naturali problematis genere, liberum erit Analystis, et semper problemata octavi aut septimi gradus per curvas quarti,

problemata decimi aut noni per curvas quinti, problemata duodecimi et undecimi per curvas sexti et sic uniformi in infinitum methodo expeditur; quum contra per Cartesium problemata octavi aut septimi gradus curvis quinti aut sexti indigeant, problemata decimi aut noni curvis septimi aut octavi, problemata duodecimi aut undecimi curvis noni aut decimi et sic in infinitum. Quod quam longe a simplicitate et veritate geometrica absit, videant ipsi Cartesiani, aut, si ita visum fuerit, contradicant.

Veritatem enim tantum inquirimus et, si in scriptis tanti viri alienubi delitescat, eam libenti statim animo et amplectemur et agnoscemus. Tanta me sane, ut verbis alienis utar, hujus portentosissimi ingenii incessit admiratio, ut pluris faciam Cartesium errantem quam multos $\alpha\alpha\tau\sigma\varphi\theta\sigma\delta\gamma\tau\alpha\zeta$.

DISSERTATIONIS

PARS III.

Hæc ad generalem doctrinam fortasse sufficiant : quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant : majus quippe infiniti casus speciales non recusant. Juvat itaque ulterius exspatiari et Analysin Cartesianam non solum ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sextuplo, decuplo, centuplo, etc. in infinitum aliquando minores deprimere, ut tanto magis error Cartesianus detegatur et proprium statim ab Analysis remedium consequatur : potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodius erit.

Proponatur invenire sex continue proportionales inter duas datas.

Sint duæ datæ B et D; prima inveniendarum ponatur A : fiet

æquatio inter A^7 et B^6D .

Hæc æquatio secundum Cartesium per curvas quinti tantum aut sexti gradus solvi potest. Nos eam per curvas quarti gradus in secunda hujus Dissertationis parte, sicut reliquas etiam ejusdem naturæ, generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominus eam per curvas tertii gradus resolvamus.

Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti A^5E^2D : æquabitur ex una parte A^7 et, divisus omnibus per A^5 , manebit æquatio inter E^2D et A^2 quæ dat, ut patet, curvam tertii gradus. Ex altera vero parte A^5E^2D æquabitur B^6D , et, omnibus per D divisus et reliquis subquadraticè depressis, manebit æquatio inter A^2E et B^3 quæ dabit etiam curvam tertii gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A , hoc est problematis propositi per curvas tertii gradus solutionem.

Sed proponatur *inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continue*,

$$\text{æquatio erit inter } A^{13} \text{ et } B^{12}D;$$

eam autem Cartesius tantum per curvas undecimi aut duodecimi gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter, ut similes quasvis ejusdem gradus, eam in secunda hujus Dissertationis parte per curvas septimi gradus solvi posse docuimus. Sed ulterius inquirenti occurrit statim elegans per curvas quinti gradus solutio, imo et datur per curvas quarti, ut infra videre est.

Æquentur primum singula hujus æquationis membra homogeneo A^5E^3D , ex una parte nempe A^{13} , et ex altera $B^{12}D$. In prima, omnibus per A^5 divisus, fiet æquatio inter A^8 et E^3D quæ dat curvam quinti gradus, ut patet. In secunda, omnibus per D divisus et per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter A^2E et B^3 , quæ dat curvam tertii gradus. Per duas itaque curvas quarum una est quinti gradus, altera tertii, problema propositum expeditur.

Sed idem etiam problema facilius, hoc est per curvas quarti gradus, construere possumus : æquentur singula æquationis membra A^9E^3D . Fiet illinc, post divisionem per A^9 , A^3 æquale E^3D , quæ æquatio dat curvam quarti gradus; istinc vero, omnibus per D divisus et deinde per

tertiam potestatem sive cubum depressis, fiet æquatio inter A^3E et B^5 quæ dabit etiam curvam quarti gradus. Problema itaque per duas quarti gradus curvas facillime construimus.

Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin *inventio triginta mediarum continue proportionalium* per curvas septimi, imo et per curvas sexti possit expediri. Æquatio

$$\text{nempe inter } A^{31} \text{ et } B^{30}D$$

communi termino $A^{21}E^9D$ æquabitur, unde problema per curvas septimi gradus expeditur; aut communi termino $A^{22}E^8D$ æquabitur, unde manabit solutio per curvas sexti gradus.

Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas noni gradus, et patet ex præmissis posse assignari rationem, inter gradum problematis et gradum curvarum illud solventis, omni data ratione majorem. Quod quum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati et admonitionis et emendationis nostræ subscribant.

Advertendum autem immutandam sæpe esse ipsam æquationis formam, ut commodam per partes aliquotas divisionem homogenea ipsa recipiant, quod semel monuisse sufficiet.

Proponatur videlicet *inventio decem mediarum* et sit

$$\text{æquatio inter } A^{11} \text{ et } B^{10}D.$$

Ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam, verbi gratia Z , ut sit

$$\text{æquatio inter } A^{11}Z \text{ et } B^{10}DZ;$$

ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depressio. Æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis A^8E^4 : illinc oriatur

$$\text{æquatio inter } A^3Z \text{ et } E^5,$$

quæ dat curvam quarti gradus; istinc vero, beneficio extractionis lateris quadratoquadratici, inter A^2E et latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10}DZ$, quod, si placet, sit X solidum, quæ æquatio dat curvam

tertiū gradus, atque ita invenientur decem mediae per duas curvas quarum altera est quarti, altera vero tertii gradus : quod per levem illam prioris aequationis immutationem facillime sumus exsecuti.

Nec moror infinita alia quae Analystis ars ipsa abunde suppeditabit compendia : hoc tantum adjungo ea omnia quae superius diximus non solum locum habere, quum potestas ignota nullum aliud sub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, sed etiam si aliqua ex homogeneis a gradibus potestati proximioribus adficiantur : ut, si

$$A^{13} + NA^{12} + MA^{11} + RA^{10} \text{ aequetur } B^{12}D,$$

solutio hujus quaestionis perinde facilis reddetur, communi adsumpto aequationis homogeneo quo supra usi sumus, nempe A^9E^3D , ac si inveniendae duodecim mediae inter duas datas proponerentur. Simili autem in aequationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen, in aequationibus in quibus una tantum reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem potestatis illius pure debere esse numerum primum ut ab eo gradus illius problematis designetur. Si enim exponentis ille sit numerus compositus, problema ad gradus numerorum qui eum metiuntur statim devolvetur.

Quaerantur, exempli gratia, octo mediae continue proportionales inter duas datas, fiet

$$\text{aequatio inter } A^9 \text{ et } B^8D,$$

quo casu, quum numerus 9 sit compositus, a numero 3 bis mensuratus, inferetur problema esse tertii gradus : quod quidem ita se habet. Si enim inter duas datas reperiantur duae mediae, et rursus inter primam et secundam, secundam et tertiam, tertiam et quartam reperiantur similiter duae mediae, fient octo mediae inter duas primum propositas lineas.

Si quaerantur quatuordecim mediae inter duas datas, aequatio, quae est inter A^{15} et $B^{13}D$, indicabit problema devolvi ad alia duo problemata, quorum unum est tertii gradus, alterum quinti.

Unde apparet exponentem pure potestatis debere esse numerum

primum ut vere gradum problematis exprimat et designet. Quum autem *numeros a binario quadratico in se ductos et unitate auctos esse semper numeros primos* ⁽¹⁾ apud me constet et jamdudum Analystis illius theorematibus veritas fuerit significata, nempe esse primos 3, 5, 17, 257, 65537, etc. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio *problema construemus cujus gradus ad gradum curvarum ipsius solutioni inservientium rationem habeat data quavis majorem.*

Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continue proportionales : fiet

$$\text{aequatio inter } A^{257} \text{ et } B^{256} D,$$

et singuli termini aequabuntur sequenti $A^{256} E^{16} D$, et mox questio per curvas 17ⁱ gradus expeditur.

Si querantur mediae 65536, questio per curvas 257ⁱ gradus solvetur, et sic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proxime minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt?

An vero errasse Cartesium ulterius Cartesiani dissimulabunt? ego sane ἐπεὶ et quid statuendum hac de re sit sollicitus et tacitus exspecto.

⁽¹⁾ C'est la célèbre proposition, que $2^{2^n} - 1$ est un nombre premier, dont Euler a reconnu la fausseté pour $n = 5$, c'est-à-dire pour le nombre qui suit immédiatement le dernier donné par Fermat.

1.

METHODUS

AD

DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM ⁽¹⁾.

Omnis de inventionē maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione :

Statuatur quilibet questionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub A , gradu $<$ aut gradibus $>$, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus. Adequantur, ut loquitur Diophantus ⁽²⁾, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peraeto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad E vel ad elationem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis,

(¹) Cet écrit, envoyé, par l'intermédiaire de Mersenne, à Descartes, qui le reçut vers le 10 janvier 1638, devint dès lors, entre Fermat et l'auteur de la *Géométrie*, le principal thème de la polémique déjà ouverte à propos de la *Dioptrique*.

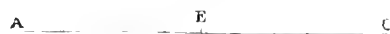
Le second alinéa se retrouve intégralement vers la fin de l'écrit IV suivant. Les additions entre crochets — *aut gradibus* (ligne 3 de l'alinéa); *sub* (page 134, ligne 2) — sont empruntées à cette seconde rédaction et ne doivent pas avoir figuré dans la première. Les seules autres divergences correspondent aux leçons suivantes du texte postérieur : page 134, lignes 1, 2, 3 « *Elisis... homogeneis... involutis, reliqua* » — ligne 4 : « *istius ultimæ* ».

(²) Diophante emploie (V, 14 et 17), dans un but spécial et pour désigner une égalité approximative, les termes de $\pi\alpha\lambda\iota\sigma\tau\epsilon\gamma$ et de $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\sigma\theta\upsilon$, que Xylander et Bachet ont traduits par *adequalitas* et *adequale*.

affectione sub E omnino liberetur. Elidantur deinde utrinque homogenea sub E aut $<$ sub $>$ ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua aequentur, aut, si ex una parte nihil superest, aequentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultima istius aequalitatis dabit valorem A , quâ cognitâ, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innoteseet.

Exemplum subijcimus : *Sit recta AC (fig. 91) ita dividenda in E ut rectangulum AEC sit maximum.*

Fig. 91.



Recta AC dicatur B . Ponatur pars altera ipsius B esse A : ergo reliqua erit $B - A$, et rectangulum sub segmentis erit B in $A - Aq.$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B esse $A + E$: ergo reliqua erit $B - A - E$, et rectangulum sub segmentis erit

$$B$$
 in $A - 1q.$ + B in $E - A$ in E bis $- Eq.$,

quod debet adæquari superiori rectangulo

$$B$$
 in $A - 1q.$

Demptis communibus,

$$B$$
 in E adæquabitur A in E bis + $Eq.$,

et, omnibus per E divisis,

$$B$$
 adæquabitur A bis + E .

Elidatur E ,

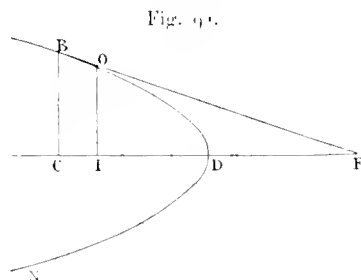
$$B$$
 æquabitur A bis.

Igitur B bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

DE TANGENTIBUS LINEARUM CURVARUM.

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, *parabola* BDN (*fig.* 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolam et in puncto E cum diametro concurrens.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolam; sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum :

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C: datur etiam CD : sit igitur CD aequalis D datae. Ponatur CE esse A : ponatur CI esse E .

Ergo

D ad $D - E$ habebit majorem proportionem
quam $Aq.$ ad $Aq. + Eq. - I$ in E bis.

Et, ducendo inter se medias et extremas,

D in $Aq. + D$ in $Eq. - I$ in E bis majus erit quam D in $Aq. - Aq.$ in E .

Adequentur igitur juxta superiorem methodum : demptis itaque communibus,

D in $Eq. - D$ in I in E bis adequabitur $Aq.$ in E ,

aut. quod idem est.

$$D \text{ in } E q. = Aq. \text{ in } E \quad \text{adequabitur} \quad D \text{ in } t \text{ in } E \text{ bis.}$$

Omnia dividantur per E : ergo

$$D \text{ in } E \pm Aq. \quad \text{adequabitur} \quad D \text{ in } t \text{ bis.}$$

Elidatur D in E : ergo

$$Aq. \quad \text{aequabitur} \quad D \text{ in } t \text{ bis.}$$

ideoque

$$t \quad \text{aequabitur} \quad D \text{ bis.}$$

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi; ejus enim beneficio centra gravitatis ⁽¹⁾ in figuris lineis curvis et rectis comprehensis et in solidis invenimus, et multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat.

De quadraturis spatiorum sub lineis curvis et rectis contentorum, imo et de proportionibus solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis et altitudinis, fuse jam cum Domino de Roberval egimus ⁽²⁾.

II.

CENTRUM GRAVITATIS PARABOLICI CONOIDIS,

EX EADEM METHODO ⁽³⁾.

Esto parabolicus conois CBAY (*fig. 93*), ejus axis IA, basis circum circa diametrum CIV. Queritur centrum gravitatis perpetuâ et con-

⁽¹⁾ Voir ci-après sous le numéro II.

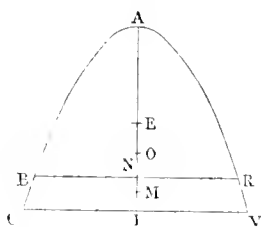
⁽²⁾ Voir les lettres de Fermat à Roberval des 22 septembre, 4 novembre et 16 décembre 1636.

⁽³⁾ Cet écrit paraît être celui que Fermat adressa, pour Roberval, à Mersenne, avec sa lettre du 20 avril 1638. Mersenne en envoya l'énoncé à Descartes, le 1^{er} mai suivant, sans prendre soin de supprimer les derniers mots, malgré l'allusion directe qu'ils renfermaient.

stanti, qua maximam et minimam et tangentes linearum curvarum investigavimus, methodo, ut novis exemplis et novo usu, eoque illustri, pateat falli eos qui fallere methodum existimant.

Ut posset parari analysis, axis IA dicatur B ; ponatur centrum gravitatis esse O , et rectam AO ignotam dici A ; secetur axis IA quovis plano, ut BX , et ponatur IX esse E : ergo NA erit $B - E$.

Fig. 93.



Constat in hac figura et similibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum, in portionibus abscissis per parallelas basi, in eadem proportionem dividere axes (quod, in parabole ab Archimede ⁽¹⁾ demonstratum, porrigitur non dissimili ratiocinio ad parabolas omnes et parabolicos conoides, ut patet): ergo centrum gravitatis portionis cujus axis NA , baseos semidiameter BN , ita dividet AN in puncto, verbi gratia, E ,

ut ratio NA ad AE sit eadem rationi IA ad AO .

Erit igitur, in notis,

ut B ad A , ita $B - E$ ad portionem axis AE ,

quae idcirco aequabitur

$$\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B},$$

et ipsa OE , quae est intervallum inter duo centra gravitatis, aequabitur

$$\frac{A \text{ in } E}{B}.$$

Ponatur portionis reliquae $CBRV$ centrum gravitatis esse M , quod

⁽¹⁾ ARCHIMÈDE. *De aequiponderantibus*, II, prop. VII.

necessario debet esse inter puncta N et L, intra figuram, per petitionem 9 Archimedis *De æquiponderantibus* ⁽¹⁾, quum figura CBRV sit in easdem partes cava. Sed

ut portio CBRV ad portionem BAR, ita est EO ad OM,

quum O sit centrum gravitatis totius figuræ CAV, et puncta E et M sint centra gravitatis partium; portio autem CAV ad portionem BAR est, in nostro conoide Archimedeo ⁽²⁾, ut quadratum LA ad quadratum NA, hoc est, in notis,

$$\text{ut } Bq. \text{ ad } Bq. + Eq. = B \text{ in } E \text{ bis} :$$

ergo, dividendo,

portio CBRV est ad portionem BAR

$$\text{ut } B \text{ in } E \text{ bis} = Eq. \text{ ad } Bq. + Eq. = B \text{ in } E \text{ bis}.$$

Demonstravimus autem

ut portio CBRV ad portionem BAR, ita esse OE ad OM :

erit igitur in notis

$$\text{ut } B \text{ in } E \text{ bis} = Eq. \text{ ad } Bq. + Eq. = B \text{ in } E \text{ bis}, \quad \text{ita } OE \text{ sive } \frac{4 \text{ in } E}{B} \text{ ad } OM,$$

quæ proinde aequalitur

$$\frac{Bq. \text{ in } 4 \text{ in } E + 4 \text{ in } Ec. = B \text{ in } 4 \text{ in } Eq. \text{ bis}}{Bq. \text{ in } E \text{ bis} = B \text{ in } Eq.}.$$

Quum autem punctum M, ex demonstratis, sit inter puncta N et L, ergo recta OM erit minor rectâ OL; recta autem OL in notis est $B - A$:

⁽¹⁾ « PETIT. IX. Cujuscumque figuræ si fuerit ambitus in easdem partes cavus, centrum gravitatis figuræ intus esse », page 158 de l'édition ARCHIMEDIS *Opera quæ extant, novis demonstrationibus commentariisque illustrata* per Davidem Rivaltum a Flurantia Casonum etc. — Parisiis, apud Claudium Morellum, via Jacobæa, ad insigne Fontis. M. DC. XV.

⁽²⁾ ARCHIMÈDE, *De conoïdibus et spheroidibus*, prop. XXVI.

deducta est igitur quaestio ad methodum et adaequanda

$$B - A \text{ cum } \frac{Bq. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. \text{ bis}}{Bq. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } Eq.}$$

et, omnibus ductis in denominatorem et abs E divisus, adaequabuntur

$$Bc. \text{ bis} - Bq. \text{ in } A \text{ bis} - Bq. \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E$$

et

$$Bq. \text{ in } A + A \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis.}$$

Quandoquidem nihil est utrimque commune, elidantur homogenea omnia abs E affecta, et aequentur reliqua : fiet

$$Bc. \text{ bis} - Bq. \text{ in } A \text{ bis} = \text{aequalis} = Bq. \text{ in } A,$$

ideoque

$$A \text{ ter} = \text{aequabitur} = B \text{ bis.}$$

Erit igitur

$$4A \text{ ad } AO \text{ ut } 3 \text{ ad } 2$$

et

$$AO \text{ ad } OA \text{ ut } 2 \text{ ad } 1.$$

Quod erat inveniendum ⁽¹⁾.

Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum et parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum. Quemadmodum autem, verbi gratia, *in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso* indaganda sint centra gravitatis, non vacat in praesens indicare : sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quae servant proportionem 11 ad 5 ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ces relations étaient connues, d'après ARCHIMÈDE, *De iis quae velantur in aequi*, Livre II, prop. 2 et suivantes. Elles étaient d'ailleurs démontrées dans la proposition 29 de l'Ouvrage : *Federici Commandini Urbinate liber de centro gravitatis solidorum. Cum privilegio in annos X. Bononiae ex officina Alexandri Benacii. M. D. LXV*, publié en même temps que la restitution, par Commandin, du Traité précité d'Archimède, où elles sont seulement supposées.

⁽²⁾ Ce rapport avait déjà été indiqué à Roberval dans la lettre de Fermat du 4 novembre 1636.

III.

AD EANDEM METHODUM.

Volo meâ methodo *secare lineam* AC (*fig. 94*) *datam ad punctum* B, *ita ut solidum contentum sub quadrato* AB *et linea* BC *sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam* AC *in quovis alio puncto.*

Fig. 94.



Ponamus in notis algebraicis lineam AC vocari B , et lineam AB incognitam A ; BC erit $B - A$: oportet igitur solidum $Aq.$ in $B - A$ c. satisfacere questioni.

Sumamus iterum, loco A , $A + E$: solidum, quod fiet ex quadrato $A + E$ et ex $B - E - A$, erit

$$\begin{aligned} & B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \\ & - A c. - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec. \end{aligned}$$

Id comparo primo solido

$$Aq. \text{ in } B - A c.,$$

tanquam essent aequalia, licet revera aequalia non sint, et hujusmodi comparisonem vocavi adaequalitatem, ut loquitur Diophantus (sic enim interpretari possum graecam vocem $\pi\alpha\rho\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$ (¹) qua ille utitur). Deinde e duobus solidis demo quod iis est commune, scilicet

$$B \text{ in } Aq. - A c.;$$

quo peracto, nihil ex una parte superest, et superest ex alia

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Comparanda sunt ergo homogenea notata signo $+$ cum iis quae notan-

(1) Voir la note 2 de la page 133.

tur signo $-$, et iterare comparisonem [adæqualitatem] ⁽¹⁾ oportet inter

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } 1 \text{ in } E \text{ bis ex una parte,}$$

$$\text{et } 1 \text{ in } Eq. \text{ ter} + 1q. \text{ in } E \text{ ter} + Ec. \text{ ex altera.}$$

Totum dividimus per E : comparatio [adæqualitas] erit inter

$$B \text{ in } E + B \text{ in } 1 \text{ bis} \quad \text{et} \quad 1 \text{ in } E \text{ ter} + 1q. \text{ ter} + Eq.$$

Hac divisione peracta, si omnia homogenea dividi possunt per E , iteranda erit divisio per E , donec reperiatur aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis ⁽²⁾ verbis utar, quod non afficiatur ab E . Sed quia, in exemplo proposito, comperimus divisionem iterari non posse, hic standum est.

Deinde utrimque deleo homogenea quæ afficiuntur ab E : superest

$$\text{ex una parte} \quad B \text{ in } 1 \text{ bis}, \quad \text{et ex alia} \quad 1q. \text{ ter},$$

inter quæ non amplius facere oportet, ut antea, comparisones fictas et adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per 1 : ergo

$$B \text{ bis erit} \quad \text{æqualis} \quad 1 \text{ ter},$$

et

$$B \text{ erit ad } 1 \text{ ut } 3 \text{ ad } 2.$$

Redeamus ad nostram questionem et dividamus AC in puncto B ita ut

$$AC \text{ sit ad } AB \text{ ut } 3 \text{ ad } 2 :$$

dico solidum quadrati AB in BC esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea AC , in qualibet alia sectione.

⁽¹⁾ Le texte véritable est douteux : Fermat n'a dû écrire que l'un des deux mots, *comparisonem* ou *adæqualitatem*, qu'il employait comme synonymes; l'autre serait une glose du copiste ou du possesseur de l'original. Même remarque pour *comparatio* et *adæqualitas*, quatre lignes plus bas.

⁽²⁾ En réalité, Fermat étend singulièrement ici le sens donné au mot *affectio* par Viète (voir notamment *In Artem Analyticen Isagoge*, cap. III, 9, p. 3 de l'édition de Schooten). Viète en effet entend par là la présence, à la suite de la *potestas* (puissance de l'inconnue, sans coefficient), de termes de degré moins élevé. Ainsi, pour lui, x^n serait une *potestas pura* (si $n \geq 2$) ; tout polynôme entier en x (ayant l'unité pour coefficient du terme de degré le plus élevé) et s'annulant avec x , une *potestas affecta*.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum e libro Apollonii *De determinata sectione*, qui, ut refert Pappus initio septimi libri, difficiles determinationes habebat ⁽¹⁾; et eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed, ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem $\mu\omicron\nu\alpha\chi\acute{\iota}\nu$ καὶ ἐλάχιστον, *minimam et singularem*, ideo scilicet quia, si proponatur questio circa magnitudines datas, duobus semper locis satisfiat questioni, sed, in minimo aut maximo termino, unus est qui satisficiat locis : idcirco Pappus vocat *minimam et singularem*, id est unicam, proportionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat quid per $\mu\omicron\nu\alpha\chi\acute{\iota}\nu$ intelligat Pappus, et veritatem quam modo explicui ignoravit ⁽²⁾. Sed ecce propositionem :

Sit recta data OMID (fig. 95), et in ea quatuor puncta O, M, I, D data. Dividenda est portio MI in puncto N ita ut rectanguli OND sit ad rectangulum MNI proportio minor quam proportio cujuscumque rectanguli paris OND ad quodvis aliud par MNI.

Fig. 95.



Supponamus in notis lineam OM datam vocari *B*, lineam DM datam *Z*, et MI datam *G*; fingamus nunc MN, quod quærimus, vocari *A* : ergo rectangulum OND in notis erit

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } t + Z \text{ in } t - tq.,$$

⁽¹⁾ PAPPUS, éd. Commandin, fol. 159 recto, ligne 14; éd. Hultsch, page 644, ligne 3.

⁽²⁾ PAPPUS, éd. Commandin (cf. éd. Hultsch, page 758, ligne 1), prop. 61 :

Fol. 196 recto : « LEMMA XXI. Tribus datis rectis lineis AB BC CD, si fiat ut rectangulum ABD ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, singularis proportio, et minima est rectanguli AED ad rectangulum BEC. »

Fol. 196 verso A : « COMMENTARIUS. Græcus codex ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστος ἐστὶν ὁ πρὸς τὸν ἀπὸ πρὸς τὸν πρὸς ζῆτα, quibus verbis quid significetur, quidque per monachos, et epitagma in his lemmatibus intelliget, satis percipi non potest, cum Apollonii libris carcamus, in quos ea conscripta sunt. »

Les lettres A, B, E, C, D de Commandin correspondent respectivement aux lettres O, M, N, I, D de Fermat.

et rectangulum MXI

$$G \text{ in } A = Aq.$$

Oportet igitur proportionem

$$B \text{ in } Z = B \text{ in } A + Z \text{ in } A = Aq., \quad \text{ad} \quad G \text{ in } A = Aq.,$$

esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ MI.

Sumamus iterum, loco A, A + E, et habebimus proportionem

$$B \text{ in } Z = B \text{ in } A + B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E = Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} \\ \text{ad} \quad G \text{ in } A + G \text{ in } E = Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis},$$

quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est : multiplicare primum terminum per quantum ex una parte, et secundum per tertium ex alia, et simul hæc duo producta comparare.

Productum

$$B \text{ in } Z = B \text{ in } A + Z \text{ in } A = Aq., \quad \text{qui prior est terminus},$$

per

$$G \text{ in } A + G \text{ in } E = Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis}, \quad \text{qui est ultimus terminus},$$

facit

$$B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A = G \text{ in } B \text{ in } Aq. + G \text{ in } Z \text{ in } Aq. = G \text{ in } Ac. \\ + B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } E = B \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E + Z \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E = Aq. \text{ in } G \text{ in } E \\ = B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Ac. = Z \text{ in } Ac. + Aqq. \\ = B \text{ in } Z \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } Eq. = Z \text{ in } A \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } Eq. \\ = B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} = Z \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} + Ac. \text{ in } E \text{ bis}.$$

Productum autem

$$G \text{ in } A = Aq., \quad \text{secundi termini},$$

per

$$B \text{ in } Z = B \text{ in } A + B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E = Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis}, \\ \text{tertium terminum},$$

facit

$$\begin{aligned} B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A &= G \text{ in } B \text{ in } Aq. + G \text{ in } B \text{ in } U \text{ in } E + G \text{ in } Z \text{ in } Aq. \\ &+ G \text{ in } Z \text{ in } U \text{ in } E = G \text{ in } Aq. + G \text{ in } U \text{ in } Eq. + G \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} \\ &+ B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Aq. \text{ in } E = Z \text{ in } Aq. \\ &+ Z \text{ in } Aq. \text{ in } E + Aqq. + Aq. \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } E \text{ bis}, \end{aligned}$$

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod ipsis commune est, et residuum dividamus per E ; supererit,

$$\begin{aligned} \text{ex una parte, } & B \text{ in } Z \text{ in } G = Aq. \text{ in } G = B \text{ in } Z \text{ in } E + B \text{ in } U \text{ in } E \\ &= Z \text{ in } U \text{ in } E = B \text{ in } Z \text{ in } U \text{ bis} = Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis}, \end{aligned}$$

et

$$\text{ex alia, } = G \text{ in } U \text{ in } E = G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. = Z \text{ in } Aq.$$

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E ; supererit

$$\begin{aligned} B \text{ in } Z \text{ in } G &= Aq. \text{ in } G = B \text{ in } Z \text{ in } U \text{ bis} = Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis} \\ &\text{æquale} = G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. = Z \text{ in } Aq., \end{aligned}$$

et, transponendo,

$$\begin{aligned} &= B \text{ in } Aq. + Z \text{ in } Aq. = G \text{ in } Aq. + B \text{ in } Z \text{ in } U \text{ bis} \\ &\text{erit æquale} = B \text{ in } Z \text{ in } G. \end{aligned}$$

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A , id est valorem MN , et consequenter punctum N , et inveniemus veritatem propositionis Pappi (1), qui docet, ad reperiendum punctum N , oportere facere

$$\begin{aligned} &\text{ut rectangulum } OMD \text{ ad rectangulum } OID, \\ &\text{ita quadratum } MN \text{ ad quadratum } NI; \end{aligned}$$

æquationis enim resolutio nos ad eandem constructionem deducit.

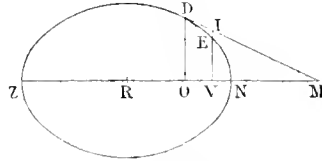
Ut tandem *tangentibus* applicetur hæc methodus, sic procedere possum:

Sit, verbi gratia, *ellipsis* ZDN (*fig. 96*), cujus axis sit ZN et cen-

(1) Voir, dans la note 2 de la page 147, la traduction par Commandin du texte de Pappus et la correspondance indiquée pour les lettres.

trum R. Sumamus punctum, ut D, in ejus circumferentia, a quo ducamus lineam DM quæ tangat ellipsin; ducamus præterea applicatam DO et supponamus \angle in \angle notis algebraicis OZ datam vocari B , et ON datam vocari G ; fingamus OM, quam quærimus incognitam, vocari A

Fig. 96.



(intelligimus autem per OM portionem axis contentam inter punctum O et concursum tangentis).

Quoniam DM tangit ellipsin, si ducamus lineam IEV, parallelam DO, per punctum V sumptum ad libitum inter O et N, certum est lineam IEV secari tangentem DM et ellipsin quoque, ut in punctis E et I; et, quia linea DM tangit ellipsin, omnia puncta præter D erunt extra ellipsin: ergo linea IV erit major lineam EV. Erit igitur major proportio

quadrati DO ad quadratum EV quam quadrati DO ad quadratum IV;

sed

ut quadratum DO ad quadratum EV,

ita, proprietate ellipsis,

rectangulum ZON est ad rectangulum ZVN,

et

ut quadratum DO ad quadratum IV, ita quadratum OM ad quadratum VM:

major est igitur proportio

rectanguli ZON ad rectangulum ZVN
quam quadrati OM ad quadratum VM.

Fingamus \angle OV \angle , sumptam ad libitum, æqualem E :

rectangulum ZON erit B in G ;

rectangulum ZVN erit B in $G - B$ in $E + G$ in $E - Eq.$;

quadratum OM erit $Aq.$;

quadratum VM erit $Aq. + Eq. - A$ in E bis.

Erit igitur major proportio

$$\begin{aligned} B \text{ in } G \text{ ad } B \text{ in } G &= B \text{ in } E + G \text{ in } E = Eq. \\ \text{quam } Atq. \text{ ad } Atq. + Eq. &= t \text{ in } E \text{ bis,} \end{aligned}$$

et consequenter, si multiplicetur prior terminus per ultimum et secundus per tertium,

$$B \text{ in } G \text{ in } Atq. + B \text{ in } G \text{ in } Eq. = B \text{ in } G \text{ in } t \text{ in } E \text{ bis,}$$

productum scilicet prioris termini per ultimum, erit majus

$$B \text{ in } G \text{ in } Atq. = B \text{ in } E \text{ in } Atq. + G \text{ in } E \text{ in } Atq. = Atq. \text{ in } Eq.$$

Oportet igitur, juxta meam methodum, comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune est et dividamus residuum per E : supererit,

$$\begin{aligned} \text{ex una parte,} \quad B \text{ in } G \text{ in } E &= B \text{ in } G \text{ in } t \text{ bis,} \\ \text{et, ex alia,} \quad &= B \text{ in } Atq. + G \text{ in } Atq. = Atq. \text{ in } E. \end{aligned}$$

Deleamus homogenea quæ aliquid habent lineæ E : supererit,

$$\text{ex una parte,} \quad = B \text{ in } G \text{ in } t \text{ bis,} \quad \text{et, ex alia,} \quad = B \text{ in } Atq. + G \text{ in } Atq.$$

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet; et, transponendo terminos, ut par est, inveniemus

$$B \text{ in } A = G \text{ in } t \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } G \text{ bis.}$$

Vides hanc resolutionem eandem esse cum Apolloniana (²): nam, mea constructione, ad reperiendam tangentem, oportet facere

$$\text{ut } B = G \text{ ad } G, \quad \text{ita } B \text{ bis ad } t,$$

id est

$$\text{ut } ZO = ON \text{ ad } ON, \quad \text{ita } ZO \text{ bis ad } OM;$$

sed, Apollonianâ, oportet facere

$$\text{ut } ZO \text{ ad } ON, \quad \text{ita } ZM \text{ ad } MN:$$

duæ autem illæ constructiones, ut palet, in idem recidunt.

(¹) APOLLONIUS, *Coniques*, I, 34.

Plura possem alia exempla addere, tum primi, tum secundi casus meæ methodi, sed hæc sufficiunt et eam esse generalem ac nunquam fallere satis probant. Demonstrationem regulæ non adjicio nec plerisque alios usus qui illius perfectionem confirmare possent, nec inventionem centrorum gravitatis, asymptotôn, quorum exemplum nisi doctissimo Domino de Roberval ⁽¹⁾.

IV.

METHODUS DE MAXIMA ET MINIMA ⁽²⁾.

Dum *syncriscos* et *anastrophes* Vietæ ⁽³⁾ methodum expenderem, earumque usum in deprehendenda æquationum correlatarum constitutione accuratius explorarem, subiit animum nova ad inventionem maximæ et minimæ exinde derivanda methodus, ejus ope dubia quælibet ad *διορισμὸν* pertinentia, quæ veteri et novæ molestiam exhibuere Geometriæ, facillime profligantur.

Maximæ quippe et minimæ sunt unicæ et singulares, quod et Pappus ⁽⁴⁾ monuit et jam veteres norunt, licet Commandinus quid

⁽¹⁾ Fermat semble ne faire allusion ici qu'à l'Écrit II qui précède. Cet Écrit fut effectivement envoyé à Roberval, par l'intermédiaire de Mersenne, en avril 1638; il n'y a au contraire, dans la correspondance connue de Fermat, aucun indice sur une application de sa méthode à la recherche des asymptotes.

⁽²⁾ Cet important morceau a été conservé par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue elle-même, mais dont il subsiste deux transcriptions de la main d'Arbogast : l'une au net (Manuscrit du prince Boncompagni), l'autre en brouillon (Bibl. Nat., *Fonds français*, 3280. nouv. acq.), qui a servi à M. Ch. Henry pour le texte qu'il a donné : *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (Rome, 1880), pages 180-183.

⁽³⁾ VIÈTE, *De recognitione æquationum*, cap. 16, et *De emendatione æquationum*, cap. 3 (éd. Schooten, p. 104 et suiv., 134 et suiv.). La *syncripsis* de Viète correspond à la recherche de la composition des coefficients d'une équation en fonction des racines de cette équation; l'*anastrophe* a pour objet l'abaissement du degré (impair) d'une équation, quand on connaît une racine de la transformée obtenue en changeant le signe de l'inconnue.

Dans tout ce fragment, au reste, Fermat emploie les expressions techniques de Viète et applique les procédés de ce dernier.

⁽⁴⁾ Voir plus haut, page 142.

per $\mu\nu\chi\zeta\delta\zeta$ intelligeret Pappus, ignorare se non diffitetur. Inde sequitur, ab utraque puncti determinationis constitutivi parte, posse sumi æquationem unam ancipitem et, ex duabus utrimque sumptis, effici duas æquationes ancipites correlatas æquales et similes.

Proponatur in exemplum *recta B ita secta ut rectangulum sub ipsius segmentis sit maximum* ⁽¹⁾. Punctum proposito satisfaciens rectam datam bifariam secat, ut patet, et maximum rectangulum æquatur quadranti B quadrati; nec ex alia quavis rectæ illius sectione orietur rectangulum æquale quadranti B quadrati.

At, si *recta eadem B proponatur secunda eâ conditione ut rectangulum sub ejus segmentis sit æquale Z plano* (quod supponendum minus quadrante B quadrati), tunc duo puncta proposito satisfacient, quæ quidem a puncto maximi rectanguli intercipiuntur.

Sit enim alicujus rectæ B segmentum A, fiet

$$B \text{ in } A = A \text{ quad.} = \text{æquale } Z \text{ plano,}$$

quæ æquatio est anceps et rectam A de duobus lateribus explicari posse indicat. Sit igitur æquatio correlata

$$B \text{ in } E = E \text{ quad.} = \text{æquale } Z \text{ plano;}$$

ex methodo Vietæ comparantur hæ duæ æquationes :

$$B \text{ in } A = B \text{ in } E = \text{æquabitur } A \text{ quad.} = E \text{ quad.,}$$

et, omnibus per $A - E$ divisis, fiet

$$B = \text{æqualis } A + E,$$

ipsæque A et E erunt inæquales.

Si sumatur aliud planum, loco Z plani, quod sit majus quam Z planum, sed minus quadrante B quadrati, tunc rectæ A et E minus inter se different quam superiores, quum puncta divisionis magis accedent ad punctum rectanguli maximi constitutivum, semperque, auctis divisionum rectangulis, ipsarum A et E differentia minuetur, donec per

⁽¹⁾ Voir plus haut la même question traitée, page 134.

ultimam maximi rectanguli divisionem evanescat, quo casu xyz vel unica continget solutio, quum duæ æquales $<$ fient $>$ quantitates, hoc est, A æquabitur E .

Quum igitur, in duabus superioribus æquationibus correlatis, per methodum Vietæam, B æquabitur $A + E$, si E æquetur ipsi A (quod contingere semper in puncto maximæ vel minimæ constitutivo apparet), ergo, in casu proposito,

$$B \text{ æquabitur } 1 \text{ bis ;}$$

hoc est, si recta B bifariam secetur, rectangulum sub ipsius segmentis erit maximum.

Esto aliud exemplum : *Recta B ita secanda est, ut solidum sub quadrato unius ex segmentis in alterum sit maximum* ⁽¹⁾.

Ponatur unum segmentum esse A ; ergo

$$B \text{ in } 1 \text{ quad.} - 1 \text{ cub. erit maximum.}$$

Æquatio correlata æqualis et similis est

$$B \text{ in } E \text{ quad.} - E \text{ cub.}$$

Comparentur juxta methodum Vietæ : ergo

$$B \text{ in } 1 \text{ quad.} - B \text{ in } E \text{ quad. æquabitur } 1 \text{ cub.} - E \text{ cub.,}$$

et, omnibus per $A - E$ divisis,

$$B \text{ in } 1 + B \text{ in } E \text{ æquabitur } 1 \text{ quad.} + A \text{ in } E + E \text{ quad.,}$$

quæ est constitutio æquationum correlatarum.

Ut quaeratur maxima, fiat E æqualis ipsi A : ergo

$$B \text{ in } 1 \text{ bis æquabitur } 1 \text{ quad. ter,}$$

hoc est,

$$B \text{ bis æquabitur } 1 \text{ ter.}$$

Constat propositum.

Quia tamen operosa nimis et plerumque intricata est divisionum

(1) Voir plus haut la même question traitée, page 150.

illa per binomia practice, conveniens visum est latera æquationum correlatarum inter se per ipsorum differentiam comparari ut, ea ratione, unicâ ad differentiam illam applicatione totum opus absolvatur.

Esto

$$Bq. \text{ in } A = Ac. \text{ æquandum maximo solido.}$$

Correlata, juxta superioris præcepta methodi, æquatio debuit sumi

$$Bq. \text{ in } E = Ec.$$

Sed, quoniam E (perinde atque A) est incerta quantitas, nihil vetat quominus vocetur $A + E$: erit igitur

$$Bq. \text{ in } A + Bq. \text{ in } E = Ac. + Ec. = Aq. \text{ in } E \text{ ter} + Eq. \text{ in } A \text{ ter,}$$

ex una parte : ex altera

$$Bq. \text{ in } A = Ac.$$

Demptis æqualibus, patet æquationem integram in homogenea ab E adfecta iri devolutam, quia in utraque æquatione reperitur A : nempe

$$Bq. \text{ in } E = \text{æquabitur} = Ec. + Aq. \text{ in } E \text{ ter} + Eq. \text{ in } A \text{ ter,}$$

et, omnibus ipsi E applicatis,

$$Bq. = \text{æquabitur} = Eq. + Aq. \text{ ter} + A \text{ in } E \text{ ter,}$$

quæ est constitutio duarum hujusmodi æquationum correlatarum.

Ad inveniendam maximam, latera duarum æquationum inter se debent æquari, ut satisfiat methodi prædictæ præceptis, ex qua posterior hæc et modum et rationem ipsam operandi desumpsit.

Æquanda igitur sunt inter se A et $A + E$: ergo E dabit nihilum. Quum igitur $Bq.$, ex jam inventa æquationum correlatarum constitutione, æquetur

$$Eq. + Aq. \text{ ter} + A \text{ in } E \text{ ter,}$$

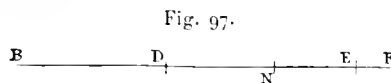
ergo elidi debent homogenea omnia ab E adfecta, utpote nihilum representantia : et manebit

$$Bq. = \text{æquale} = Aq. \text{ ter,}$$

quæ æquatio dabit maximum solidum quæsitum.

Ut autem plenius innotescat utriusque hujus nostræ methodi usum esse generalem, dispiciamus novas æquationum correlatarum species de quibus < tacet > Vieta, ex libro Apollonii *De determinata sectione* (propositione apud Pappum 61 Libri VII), cujus determinationes ipse Pappus innuit et profitetur difficiles ⁽¹⁾.

Sit recta BDEF (fig. 97), in quâ data puncta B, D, E, F. Intra puncta D et E sumendum punctum N, ut rectangulum BNF ad rectangulum DNE habeat minimam rationem.



Recta DE vocetur B , DF vocetur Z , BD vocetur D ; ponatur DN esse A : ergo

ratio D in $Z = D$ in $A + Z$ in $A = Aq.$ ad B in $A = Aq.$ est minima.

Ratio correlata similis et æqualis esto

$$D$$
 in $Z = D$ in $E + Z$ in $E = Eq.$ ad B in $E = Eq.$,

juxta priorem methodum. Factum itaque sub mediis æquabitur facto sub extremis : hoc est, ex una parte,

$$\begin{aligned} D$$
 in Z in B in $E = D$ in Z in $Eq.$ — D in A in B in $E + D$ in A in $Eq.$ \\
 $+ Z$ in A in B in $E = Z$ in A in $Eq.$ — $Aq.$ in B in $E + Aq.$ in $Eq.$,

ex altera parte,

$$\begin{aligned} D$$
 in Z in B in $A = D$ in Z in $Aq.$ — D in E in B in $A + D$ in E in $Aq.$ \\
 $+ Z$ in E in B in $A = Z$ in E in $Aq.$ — $Eq.$ in B in $A + Eq.$ in $Aq.$

Demptis communibus et facta congrua metathesi,

$$\begin{aligned} D$$
 in Z in B in $A = D$ in Z in B in $E + D$ in E in $Aq.$ — D in A in $Eq.$ \\
— Z in E in $Aq.$ + Z in A in $Eq.$ + $Aq.$ in B in $E = Eq.$ in B in A \\
æquabitur D in Z in $Aq.$ — D in Z in $Eq.$

⁽¹⁾ Voir plus haut la même question traitée, page 142.

Singulis æquationis partibus per $A - E$ divisīs (quod quidem, bina ex homogeneis correlata sigillatim inter se conferendo, facillimum : ut puta

$$D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } A - D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } E \text{ abs } A - E \text{ divisum } \quad \text{dat} \quad D \text{ in } Z \text{ in } B;$$

similiter

$$D \text{ in } E \text{ in } Aq. - D \text{ in } C \text{ in } Eq. \text{ abs } A - E \text{ divisum } \quad \text{dat} \quad D \text{ in } C \text{ in } E;$$

et sic de cæteris : homogenea enim inter se correlata satis facile disponuntur ad hujusmodi divisionem admittendam), fiet igitur, post divisionem,

$$D \text{ in } Z \text{ in } B + D \text{ in } C \text{ in } E = Z \text{ in } C \text{ in } E + B \text{ in } C \text{ in } E \\ \text{æquale} \quad D \text{ in } Z \text{ in } A + D \text{ in } Z \text{ in } E,$$

quæ tandem æqualitas æquationum correlatarum constitutionem exhibebit.

At, si ex hujusmodi constitutione quærat minima, debet E , juxta methodum, æquari A : igitur

$$D \text{ in } Z \text{ in } B + D \text{ in } Aq. = Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Aq. \quad \text{æquabitur} \quad D \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis};$$

hujus æquationis resolutio dabit valorem A , ex quo minima ratio quæsitæ statim patebit.

Nec morabitur Analystam ultimæ istius æqualitatis ambiguitas : prodet quippe se, vel invito, latus utile. Imo et in æquationibus ambiguis quæ plura duobus habent latera, non deerit solitum ab utraque hac nostra methodo, sagaci tantisper Analystæ, præsidium.

Ex supradictæ quæstionis processu, patet priorem illam methodum intricatam nimis ut plurimum evadere, propter crebras illas divisionum per binomia iterationes. Recurrendum ergo ad posteriorem, quæ tamen, licet ex priori, ut jam dictum est, deducta, miram certe facilitatem et compendia innumera peritioribus abunde suppeditabit Analystis, imo et ad inventionem tangentium, centrorum gravitatis, asymptotôn, aliorumque id genus, longe expeditior alterâ illâ evadet et elegantior.

Confidenter itaque sicut olim, ita et nunc pronuntiamus semper et legitimam, non autem fortuitam (ut quibusdam visum) ⁽¹⁾, maximæ et minimæ disquisitionem hoc unico et generali contineri epitagmate :

Statuatur etc. (*voir* page 133, ligne 7, à page 134, ligne 6; *comparer* page 133, note 1) ... innotescet.

Si qui adhuc supersunt qui methodum hanc nostram debitam sorti pronuntiant,

Hos cupiam similes tentando excudere sortes ⁽²⁾.

Qui hanc methodum non probaverit, ei proponitur :

Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectæ ad data puncta, summa trium harum rectarum sit minima quantitas.

V.

AD METHODUM DE MAXIMA ET MINIMA APPENDIX ⁽³⁾.

Quia plerumque in progressu questionum occurrunt asymmetriæ, non dubitabit Analysta triplicatas aut ulterioris etiam, si libeat, gradûs positiones usurpare : earum quippe beneficio multiplices et intricati ut plurimum vitabuntur ascensus. Hujusce artificii methodus ita procedit ut exempla infra scripta declarabunt.

Sit semicirculus cujus diameter AB (fig. 98) et in eam perpendicularis DC. Queritur maximum rectarum AC et CD aggregatum.

Diameter vocetur B ; ponatur recta AC esse A : ergo

$$CD = \text{latus}(B \text{ in } A - A \text{ quad}).$$

⁽¹⁾ Allusion à la lettre de Descartes à Merseune pour Fermat, du 18 janvier 1638 : « Car premièrement la sienne [la règle de Fermat] est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer. »

⁽²⁾ Ce vers latin n'est tiré d'aucun classique; peut-être est-il de Fermat lui-même.

⁽³⁾ Moreau inédit, publié sur la copie d'Arbogast, qui porte la mention « *d'après le manuscrit de Fermat* ».

Eo itaque deducitur questio ut

$$t + lat.(B \text{ in } t - t \text{ quad.})$$

sit maxima quantitas.

Quia, ex preceptis methodi, aequationes adæquandæ nimium sunt

Fig. 98.



scansuræ, ponatur maxima illa quantitas esse O : Vietæam enim ignotarum quantitatum per vocales expressionem cur respiciamus?

Ergo

$$t + lat.(B \text{ in } t - t \text{ quad.}) \text{ æquabitur } O,$$

ideoque

$$O - t \text{ æquabitur } lateri(B \text{ in } t - t \text{ quad.}),$$

et, omnibus in quadratum ductis,

$$O \text{ quad.} + t \text{ quad.} - O \text{ in } t \text{ bis} \text{ æquabitur } B \text{ in } t - t \text{ quad.}$$

Hoc peracto, ita instituenda est transpositio ut maximus sub O gradus unam æquationis partem solus occupet, ut eâ nempe ratione possit de maxima determinari, quo tendit artificium. Per translationem hujus modi,

$$B \text{ in } t - t \text{ quad. bis} + O \text{ in } t \text{ bis} \text{ æquabitur } O \text{ quad.}$$

Quum igitur, ex hypothesi, O sit maxima quantitas, ergo O quadratum erit quadratum maximæ quantitatis, ideoque maximum : ergo

$$B \text{ in } t - t \text{ quad. bis} + O \text{ in } t \text{ bis} \text{ (quæ omnia æquantur } O \text{ quadrato)}$$

sunt maxima quantitas; quæ æquatio, quum vacet asymmetriâ, perinde ex methodo resolvatur ac si O quantitas esset nota. Ergo

$$B \text{ in } t - t \text{ quad. bis} + O \text{ in } t \text{ bis}$$

adæquabitur

$$B \text{ in } t + B \text{ in } E - t \text{ quad. bis} - E \text{ quad. bis} \\ - t \text{ in } E \text{ quater} + O \text{ in } t \text{ bis} + O \text{ in } E \text{ bis.}$$

Sublatis communibus, et reliquis ipsi E applicatis,

$$B + O \text{ bis} \quad \text{æquabitur} \quad E \text{ bis} + I \text{ quater.}$$

Expungatur $E \text{ bis}$ ex methodo : ergo

$$B + O \text{ bis} \quad \text{æquabitur} \quad I \text{ quater,}$$

ideoque

$$I \text{ quater} - B \quad \text{æquabitur} \quad O \text{ bis,}$$

et

$$A \text{ bis} - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad O.$$

Hac æqualitate ex methodo stabilita, redeundum ad priorem, in qua ponebamus

$$I + lat.(B \text{ in } I - I \text{ quad.}) \quad \text{æquari} \quad O.$$

Quum igitur inventa sit

$$O \quad \text{æqualis} \quad I \text{ bis} - \text{dimid. } B,$$

ergo

$$I \text{ bis} - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad I + lat.(B \text{ in } I - I \text{ quad.}),$$

ideoque

$$I - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad lat.(B \text{ in } I - I \text{ quad.}).$$

omnibusque in quadratum ductis,

$$4 \text{ quad.} + B \text{ quad.} \cdot \frac{1}{4} - B \text{ in } I \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } I - I \text{ quad.},$$

et tandem

$$B \text{ in } A - I \text{ quad.} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ quad.} \cdot \frac{1}{8};$$

quæ ultima æqualitas dabit valorem A in quæsita determinatione.

Hoc artificio uti possumus ad *inventionem conï maximi ambitûs sphaeræ inscribendi* ⁽¹⁾.

Sit sphaeræ datæ diameter AD (*fig. 99*). Conus quæsitus habeat altitudinem AC, latus AB, semidiametrum baseos BC. Rectangulum AB

⁽¹⁾ Question proposée par Fermat à Mersenne dans sa lettre du 26 avril 1636.

in BC una cum BC quadrato continebit maximum spatium, ex Archimede ⁽¹⁾.

Diameter vocetur B ; recta AC, A : ergo

$$AB \text{ erit } \textit{lotus} (B \text{ in } A) \quad \text{et} \quad BC \text{ erit } \textit{lotus} (B \text{ in } A - A \text{ quad.}).$$

Rectangulum AB in BC una cum BC quadrato erit

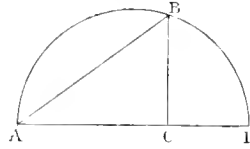
$$\textit{lotus} (B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.}) + B \text{ in } A - A \text{ quad.}$$

Hæc omnia æquantur maximo spatio : esto $O \textit{plano}$. Ergo

$$O \textit{pl.} - A \text{ quad.} - B \text{ in } A \quad \text{æquabitur} \quad \textit{lateri} (B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.}).$$

Omnia ducantur quadraticæ, etc. ; tandem devenietur, ex superiori methodo, ad æquationem $O \textit{plani}$, ejus beneficio prima æqualitas jam exposita resolvetur.

Fig. 99.



Non deerit tamen, hoc in exemplo, solutio ex methodo absque triplicata æqualitate : eo enim potest deduci quæstio ut, datâ rectâ AB in triangulo CBA, queratur maxima proportio rectanguli CBA una cum CB quadrato ad quadratum AD, quo casu methodus vulgaris sufficit.

Recta AB data vocetur B ; ponatur CB esse A : ergo AC erit potentiâ $B \text{ quad.} - A \text{ quad.}$ Sed

ut AC quadratum ad AB quadratum, ita AB quadratum ad AD quadratum ;

ergo

$$AD \text{ quad.} \quad \text{erit} \quad \frac{B \text{ quad. quad.}}{B \text{ quad.} - A \text{ quad.}},$$

ad quæ rectangulum $B \text{ in } A + A \text{ quadrato}$ debet habere maximam proportionem : hoc enim querimus.

⁽¹⁾ ARCHIMÈDE. *De sphaera et cylindro*, I, 15. donne la mesure de la surface latérale du cône.

Omnia ducantur in

$$B \text{ quad.} - A \text{ quad.};$$

ergo ratio

$B \text{ quad. quad.}$ ad $B \text{ cub. in } A + B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.} - A \text{ quad. quad.}$
est minima. Sed $B \text{ quad. quad.}$ est quantitas data : rectæ enim B data
potestas est : ergo

$$B \text{ cub. in } A + B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.} - A \text{ quad. quad.}$$

est maxima quantitas.

Ex methodo

$B \text{ cub.} + B \text{ quad. in } A \text{ bis}$ æquabitur $B \text{ in } A \text{ quad. ter} + A \text{ cub. quater}$,
quæ æquatio ad sequentem statim deprimitur

$$A \text{ quad. quater} - B \text{ in } A = \text{æquale} = B \text{ quad.},$$

ideoque patebit solutio questionis.

Nec pluribus in re perspicua immoramur : constat nempe, per triplicatas aut quadruplicatas, imo et ulterius etiam, si libeat, promotas hypostases, evanescere omnino asymmetrias et si quæ alia remorantur Analystam impedimenta.

Elegantius tamen et fortasse magis γεωμετρικῶς quæstiones de maxima et minima speciales tangentium beneficio resolvuntur, licet et ipsæ tangentés ab universali methodo deriventur.

Hujus rei unicum, quod multorum instar erit, proponatur exemplum :

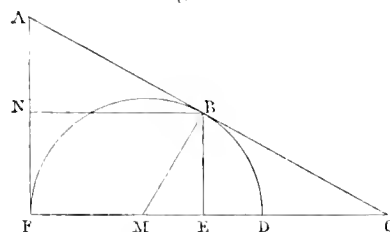
In semicirculo FBD (fig. 100) ductâ perpendiculari BE, quæritur maximum sub FE < in > EB rectangulum.

Si quæretur rectangulum FEB æquale dato, ex nostra methodo, quærenda esset hyperbole sub angulo AFC eâ conditione ut rectangula similia FEB essent æqualia dato, punctaque intersectionum hyperboles et semicirculi quæsita adimplerent; sed, quoniam rectangulum FEB maximum quærimus, quærenda hyperbole sub angulo AFC (asym-

ptotus AF, FC), que semicirculum non jam secet, sed tangat, ut in B : puncta enim contactûs maximas et minimas determinant quantitates.

Sit factum. Quum igitur hyperbole in puncto B tangat semicirculum, ergo recta, in puncto B semicirculum tangens, tanget et hyperbolam.

Fig. 100.



Sit illa recta ABC. Quum in hyperbole per B transeunte ducta sit tangens cum asymptotis in punctis A et C concurrens, ergo, ex Apollonio⁽¹⁾, rectæ AB, BC sunt æquales, ideoque æquales rectæ FE, EC, et AF dupla BE sive AN. Est autem, propter circulum, BA æqualis AF : ergo BA est dupla AN et, in triangulo simili, posito centro M, semidiameter MB dupla ME. Datur autem semidiameter : ergo et punctum E.

Et generalis ad inventionem maximæ et minimæ geometrica est questionum ad tangentes abductio; nec ideo minoris facienda universalis methodus, quum ejus ope et maxima et minima et ipsæ tangentes indigeant.

VI.

AD EANDEM METHODUM⁽²⁾.

Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita *Methodus de inventione maximæ et minimæ*, cujus beneficio terminantur quæstiones

⁽¹⁾ APOLLONIUS, *Coniques*, II. 3.

⁽²⁾ Cette pièce, imprimée dans les *Varia* (p. 69 à 73), est la seule pour laquelle il subsiste un original de Fermat (Bibl. Nat., *Fonds français*, n° 3280, nouv. acq., fol. 112 et 117), d'ailleurs sans titre.

omnes dioristicæ, et famosa illa problemata, quæ apud Pappum ⁽¹⁾, in præfatione Libri VII, difficiles determinationes habere dicuntur, facillime determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas tantum rectas absolvunt, vel per curvas rectis aut aliis curvis quomodo libet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto quod, quia concisum nimis, difficile sane, sed tamen $< \text{legitimum} >$ ⁽²⁾ tandem reperi-
tum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde, jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva amplius, sed in inveniendâ tangente, per adæqualitatem consideramus et, elisis (quæ monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum æqualitas quæ punctum concursûs tangents cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, si placet *tangens cissoïdis* ejus Diocles ⁽³⁾ traditur inventor.

Esto circulus duabus diametris AG, BI (*fig. 101*) normaliter sectus, et sit cissoïd III'G in qua, sumpto quolibet puncto, ut H, ducenda est a puncto H tangens ad cissoïdem.

Sit factum, et ducta tangens HF secet rectam CG in F. Ponatur recta DF esse *A* et, sumpto quolibet puncto inter D et F, ut E, ponatur recta DE esse *E*.

⁽¹⁾ Voir plus haut, page 142, note 1.

⁽²⁾ Le mot *legitimum* manque sur l'original de Fermat, ce qui prouve assez que cet original est lui-même défectueux. L'éditeur des *Varia* a restitué, pour l'adjectif manquant, *sufficiens*, expression qui n'est guère de la langue de Fermat et dont l'omission s'explique moins bien.

⁽³⁾ La courbe connue sous le nom de *cissoïde* se trouve définie et donnée comme employée par Dioclès, dans le commentaire d'Eutocius sur la proposition d'Archimède, *De sphaera et cylindro*, II, 2, éd. Torelli = II, 1, éd. Heiberg (Vol. III, p. 78 et suiv.). Le nom de *cissoïde* est emprunté à Proclus (*Commentaire sur le premier livre d'Euclide*), qui en parle comme d'une courbe fermée et présentant des points de rebroussement.

Quum igitur, ex proprietate specifica cissoidis, recta

$$AD \text{ sit ad } DG \text{ ut } DG \text{ ad } DH,$$

fiat jam in terminis analyticis per adaequalitatem

$$\text{ut } NE \text{ ad } EG, \quad \text{ita } EG \text{ ad portionem rectae } EN$$

quae intercipitur inter punctum E et tangentem et est EO.

Vocetur

$$AD \text{ data, } Z; \quad DG \text{ data, } V; \quad DH \text{ data, } R;$$

$$DE \text{ quesita, ut diximus, } I; \quad DE \text{ sumpta ad libitum, } E;$$

ergo

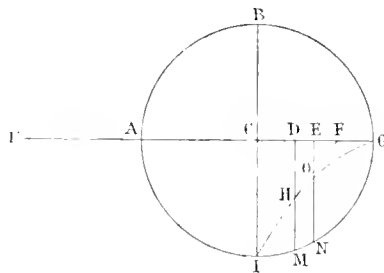
$$EG \text{ vocabitur } V - E;$$

$$EO \text{ vocabitur } \frac{R \sin I - R \sin E}{I};$$

$$EN \text{ vocabitur } \textit{latus} (Z \sin V - Z \sin E + N \sin E - Eq.).$$

Quum igitur, ex præcepto, proprietas specifica debeat considerari,

Fig. 101.



non amplius in curva, sed in tangente, ideoque faciendum sit

$$\text{ut } NE \text{ ad } EG, \quad \text{ita } EG \text{ ad } EO, \quad \text{quae applicatur tangenti.}$$

ergo, in terminis analyticis, faciendum

$$\text{ut } \textit{latus} (Z \sin V - Z \sin E + N \sin E - Eq.) \text{ ad } V - E,$$

$$\text{ita } V - E \text{ ad } \frac{R \sin I - R \sin E}{I},$$

et, quadratis singulis terminis ad vitandam asymmetriam, fiet

$$\text{ut } Z \text{ in } N \text{ -- } Z \text{ in } E \text{ + } N \text{ in } E \text{ -- } Eq, \quad \text{ad } \text{--} Nq, \text{ + } Eq, \text{ -- } N \text{ in } E \text{ bis,}$$

$$\text{ita } Nq, \text{ + } Eq, \text{ -- } N \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{ad} \quad Rq, \text{ in } \underline{\text{--}tq}, \text{ + } Rq, \text{ in } \underline{\text{--}Eq}, \text{ -- } Rq, \text{ in } \underline{\text{--}t} \text{ in } E \text{ bis.}$$

Ducantur singula homogenea in A quadratum, et deinde quod fit sub extremis adaequetur, ex praeceptis artis, ei quod fit a medio. Elisis deinde superfluis, ut monet methodus, tandem orietur aequalitas inter

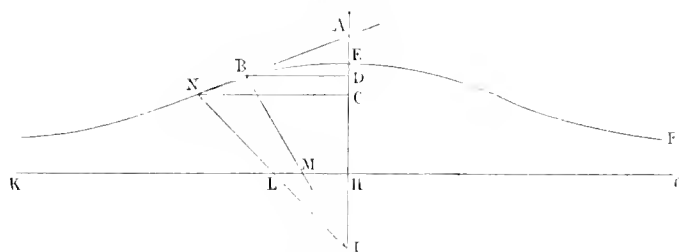
Z in A ter + V in t ex una parte, et Z in B bis ex altera.

Constructur igitur tangens hoc pacto : Producat^{ur} semidiameter circuli dati CA ad punctum U, et fiat AU recta aequalis AC. Rectangulum ADG ad rectam UD applicetur et faciat latitudinem DE. Iuncta FH tanget cissoidem.

Indicemus etiam *modum agendi in conchoide Nicomedeae*, sed indicemus tantum, ne prolixior evadat sermo.

Esto conchois Nicomedeas, ut construatur apud Pappum et Ento-
cium (⁴) figura sequens (fig. 102). Polus est punctum I, recta KG est

Fig. 102.



asymptotos curvæ, recta HE perpendicularis ad asymptoton, punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda est tangens NBA, concurrens cum HE in puncto A.

Sit factum, ut supra. Ducatur NC parallela KG. Ex proprietate specifica curvae, recta LX est æqualis rectæ HE. Sumatur quodlibet punc-

(1) PAPPUS (éd. HULTSCH), livre III, pages 58 et suivantes, livre IV, pages 242 et suivantes; EUTOCHIUS, Commentaire sur Archimède *De sph. et cyl.*, II (éd. HEIBERG, vol. III, p. 117).

tum inter C et E, ut D, a quo rectæ CN parallela ducatur DB, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietas specifica debet considerari in tangente, jungatur BI, occurrens rectæ KG in M et, ex præceptis artis, recta MB adæquetur rectæ HE : oriatur tandem quæsita æqualitas.

Quod ut procedat,

CA, ut supra, vocetur *A*; recta CD vocetur *E*; recta EH data vocetur *Z*,

et reliquæ datae suis nominibus designentur.

Invenietur facillime recta MB in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum, rectæ HE, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant, ex iis tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat Dominus Descartes ⁽¹⁾, cui nihil difficile, elegantissimè et non insubtili methodo fit satis.

Quamdiu rectis tantum lineis homogenea implicabuntur, querantur ipsa et designentur per præcedentem formulam. Imò et, vitandæ asymmetriæ causa, aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas pro applicatis ad ipsas curvas sumantur; et demum (quod operæ pretium est) portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, et procedat adæqualitas ut supra monuimus : proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Domini de Roberval assignamus.

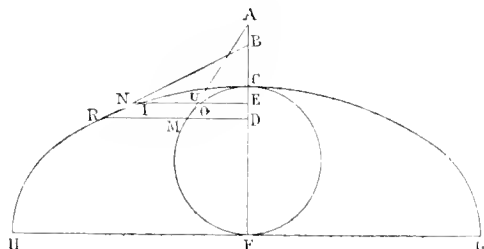
Sit curva HRIC (*fig.* 103), ejus vertex C, axis CF; et, descripto semicirculo COMF, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo ducenda est tangens RB.

Ducatur a puncto R recta RMD, perpendicularis in CDF, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietas specifica est ut recta RD sit æqualis portioni circuli CM et applicatæ DM. Ducatur in puncto M,

(1) Comparer la lettre de Roberval à Fermat, du 4 août 1640, et celle de Descartes à Fermat (éd. Clerselier, III, 64), du 25 septembre 1638

ex precedente methodo, tangens MA ad circulum : eadem nempe procederent si curva COM esset alterius naturæ.

Fig. 103.



Ponatur factum quod quaeritur, et sit :

recta DB quaesita aequalis t ;

DA, inventa ex constructione, aequalis B ;

MA, itidem inventa, vocetur D ;

MD data vocetur R ; RD data vocetur Z ;

CM, portio circumferentiae data, vocetur N ;

DE, recta utcumque assumpta, vocetur E ,

et a puncto E ducatur EOUN parallela rectae RMD.

Fiat

$$\text{ut } A \text{ ad } A - E, \quad \text{ita } Z \text{ ad } \frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{t},$$

quae idcirco aequabitur rectae NIUOE.

Igitur recta $\frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{t}$ debet adequari (propter proprietatem specificam curvae quae in tangente consideranda est) rectae OE una cum curva CO; curva autem CO aequatur curvae CM minus curva MO : ergo recta $\frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{t}$ debet adequari rectae OE et curvae CM minus curva MO. Ut autem hi tres termini ad terminos analyticos reducantur, pro recta OE, ad vitandam asymmetriam ex superiori cautione, sumatur recta EU applicata tangenti, et pro curva MO sumatur portio tangentis MU, cui ipsa MO adjacet.

Ad inveniendam autem EU in terminis analyticis, fiet

$$\text{ut } B \text{ ad } B - E, \quad \text{ita } R \text{ ad } \frac{R \text{ in } B - R \text{ in } E}{B},$$

quæ ideoque æquabitur ipsi EU.

Ad inveniendam deinde MU, fiet

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \quad \text{ita } E \text{ ad } \frac{D \text{ in } E}{B},$$

quæ ideoque, propter similitudinem triangulorum, ut supra, æquabitur ipsi MU.

Curva autem CM vocata est V: igitur in terminis analyticis fiet adæqualitas inter

$$Z \text{ in } t - Z \text{ in } E \quad \text{ex una parte,} \quad \text{et} \quad \frac{R \text{ in } B - R \text{ in } E}{B} + V - \frac{D \text{ in } E}{B} \quad \text{ex altera,}$$

Ducantur omnia in B in t, consistet adæqualitas inter

$$Z \text{ in } B \text{ in } t - Z \text{ in } B \text{ in } E \quad \text{et} \quad R \text{ in } B \text{ in } t - R \text{ in } t \text{ in } E + B \text{ in } V \text{ in } t - D \text{ in } t \text{ in } E.$$

Quum autem, ex proprietate curvæ,

$$Z \quad \text{æquetur} \quad R + V,$$

ergo

$$Z \text{ in } B \text{ in } t \text{ ex una parte} \quad \text{æquatur} \quad R \text{ in } B \text{ in } t + B \text{ in } V \text{ in } t \text{ ex altera;}$$

ideoque, ablatis communibus, reliqua comparentur.

$$Z \text{ in } B \text{ in } E \text{ nempe cum } R \text{ in } t \text{ in } E + D \text{ in } t \text{ in } E.$$

Fiat divisio per E; et, quia nullum est hoc casu homogeneum superfluum, nulla fieri debet elisio. Æquetur igitur

$$Z \text{ in } B \text{ cum } R \text{ in } t + D \text{ in } t;$$

fiet igitur

$$\text{ut } R + D \text{ ad } B, \quad \text{ita } Z \text{ ad } t.$$

Constructio : Ad construendum igitur problema, si fiat

$$\text{ut aggregatum rectarum MA, MD ad rectam DA,} \quad \text{ita RD ad DB.}$$

puncta BR tanget curvam CR.

Quia vero

ut summa rectarum MA, MD ad DA, ita MD ad DC,

ut facile est demonstrare, ideo faciendum erit

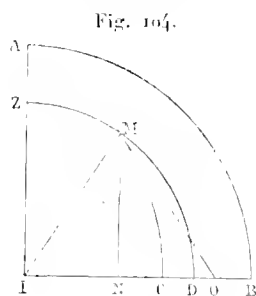
ut MD ad DC, ita RD ad BD,

sive, ut elegantior evadat constructio, junctæ rectæ MC ducenda erit parallela RB.

Eadem methodo species omnes illius curvæ tangentes suas nanciscuntur : constructionem generalem olim dedimus ⁽¹⁾.

Quoniam vero quæsitum est *de tangente quadrataria sive quadratricis Dinostrati* ⁽²⁾, ita construimus ex præceptis præcedentibus.

Sit quadrans circuli AIB (*fig. 104*), quadrataria AMC in qua, ad datum punctum M, ducenda est tangens.



Junctâ MI, centro I, intervallo IM, quadrans ZMD describatur et, ductâ perpendiculari MN, fiat

ut MN ad IM, ita portio quadrantis MD ad rectam IO ⁽³⁾;

junctâ MO tanget quadratariam. Hæc sufficiant.

⁽¹⁾ En 1638 (voir plus haut la note 1 de la page 162). Cette construction générale, applicable aux cycloïdes allongées ou raccourcies, est perdue.

⁽²⁾ PAPPE (éd. HULTSCH), livre IV, pages 250 et suivantes. PROCLUS (*Commentaire sur le premier livre d'Euclide*) attribue à Hippias l'invention de la quadratrice.

⁽³⁾ L'original, comme les *Varia*, donne :

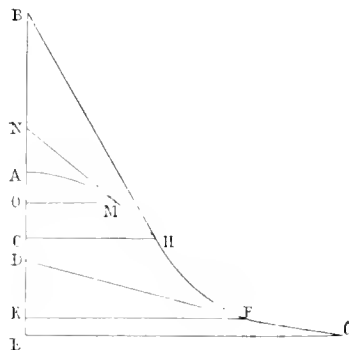
« ut IM ad MN, ita portio quadrantis MD ad rectam NO » ;

mais toute la ligne se trouve en surcharge d'une autre main, qui a corrigé le texte de Fermat, en sorte qu'on ne peut plus le discerner.

Quia tamen sæpius curvatura mutatur, ut in conchoïde Nicomedea, quæ pertinet ad priorem casum, et in omnibus speciebus curvæ Domini de Roberval (primâ exceptâ) quæ pertinet ad secundum, ut perfecte curva possit delineari, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexa fit concava vel contra : cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis et minimis, hoc præmisso lemmate generali :

Esto, in sequenti figura (fig. 105) (¹), curva AHFG, cujus curvatura in puncto H, verbi gratia, mutetur. Ducatur tangens HB, applicata HC. Angulus HBC erit minimus omnium quos tangentes cum axe ACD, sive infra, sive supra punctum H, efficiunt, ut facile est demonstrare.

Fig. 105.



Sumatur enim, supra H punctum, punctum M; tangens occurret axi inter A et B, ut in N : igitur angulus ad N major erit angulo ad B. Similiter, si infra punctum H sumatur punctum F, punctum D, in quo concurrat tangens FD cum axe, erit inferius puncto B, et tangens DF occurret tangenti BH ad partes F et H : igitur angulus ad D erit major angulo ad B.

Casus omnes non persequimur, sed modum tantum investigandi indicamus, quum curvarum formæ infinitas species exhibeant.

Et igitur, verbi gratia, in exposito diagrammate, punctum H inve-

¹ La figure manque dans les *Varia*.

niatur, quæratum primum, ex superiore methodo, ad punctum quodlibet curvæ utcumque sumptum, proprietas tangentis. Hæc inventa, quæratum, per doctrinam de maximis et minimis, punctum H a quo, ducendo perpendicularem HC et tangentem HB, recta HC ad CB habeat minimam proportionem : ea enim statione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H, ita inventum, esse initium mutationis in curvatura.

Ex prædicta methodo de maximis et minimis derivantur artificie singulari inventiones centrorum gravitatis, ut alias indicavi Domino de Roberval ⁽¹⁾.

Sed et coronidis loco possunt etiam et, *datâ curvâ, inveniri ipsius asymptoti*, quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc, si libuerit, fusius aliquando explicabimus et demonstrabimus.

VII.

PROBLEMA MISSUM AD REVERENDUM PATREM MERSENNUM

10^a die Novembris 1642 ⁽²⁾.

Invenire cylindrum maximi ambitûs in data sphaera.

Detur sphaera cujus diameter AD (*fig.* 106), centrum C. Queritur cylindrus maximi ambitûs in ea inscribendus.

Sit factum, et cylindri quæsiti basis esto DE, latus EA (huic enim positioni aptari potest cylindrus, propter angulum in semicirculo rectum). Ambitus cylindri similis est quadrato DE et rectangulo DEA bis :

⁽¹⁾ Voir plus haut, page 136.

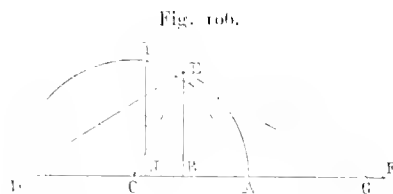
⁽²⁾ Ce titre est tiré du manuscrit de la Bibliothèque Nationale, *Fonds latin*, 11197 : il n'existe pas dans les manuscrits du prince Bonecompagni, où l'on trouve une ancienne copie du morceau, en dehors de celle d'Arbogast. Fermat avait proposé à Mersenne ce problème, dès le 20 avril 1636, en même temps que celui du cône inscrit de surface maximum (voir ci-dessus, p. 155). La solution, envoyée six ans après, est d'ailleurs purement synthétique.

Tout le morceau a été publié par M. Ch. Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*), pages 195-196, d'après la première source seulement.

Querendum itaque maximum quadrati DE et rectanguli DEA bis aggregatum.

Quadratum DE aequatur rectangulo ADB (demissâ perpendiculari EB), et rectangulum DEA aequatur rectangulo sub AD in BE. Querimus igitur maximum rectanguli ADB et rectanguli sub AD in BE bis aggregatum et, omnibus ipsi AD rectæ datæ applicatis, quæritur maximum rectarum DB et BE bis aggregatum.

Hoc autem est facile : fiat enim CB dimidia BE aut, quod idem est, sit BC quinta pars potentiâ quadrati CE dati, punctum E satisfaciet proposito.



Ducatur enim tangens EF cum diametro productâ in puncto F conveniens : Aio summam rectarum DB, BE bis esse maximam.

Quum enim CB sit dimidia BE, ergo BE erit dimidia BF; ergo BF erit aequalis duplæ BE : tota igitur DF rectis DB et BE bis erit aequalis. Sed et patet aggregatum rectarum DB, BE bis esse maximum.

Sumatur enim quodvis punctum in semicirculo, < ut > I, a quo demittatur perpendicularis IN.

A puncto autem I ducatur IG parallela tangenti, occurrens diametro in puncto G. Punctum G erit inter puncta F et D : alioqui parallela GI non occurret semicirculo.

Est

$$\text{ut FB ad BE, ita GN ad NI,}$$

propter parallelismum; sed FB est dupla BE : ergo GN est dupla NI, ideoque GN est aequalis NI bis, et tota GD aggregato rectarum DN et NI bis. Quum igitur GD (cui aequatur aggregatum DN, NI bis) sit minor rectâ DF (cui aequatur rectarum DB, BE bis aggregatum), ergo rectarum DB, BE bis aggregatum est maximum, et cylindrus quaesitus habet basim DE et latus EA.

Probabitur ex supra dictis rectam DE ad EA ita esse ut majus segmentum rectæ extremâ ac mediâ ratione sectæ ad minus.

Sed et *cylindrum dati ambitûs eâdem viâ invenire et construere possumus.*

Statim quippe deducetur questio ad quærendam rectarum DN, NI bis summam æqualem datæ rectæ. Si recta data DG (quæ quidem ex superiori determinatione non potest esse major rectâ DF). Fiat rectæ FE parallela recta GI : punctum I satisfaciens quæstioni et quandoque duos cylindros exhibebit, quandoque unicum, propositioni satisfaciens.

Quum enim punctum G erit inter F et A, duo cylindri præstabunt propositum; si vero punctum G sit in A aut ulterius, unicus tantum cylindrus præstabit quæstionem ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Le manuscrit *Fonds latin* 11197, seul des trois sources, ajoute à cette solution les trois corollaires suivants, qu'on doit attribuer à Mersenne plutôt qu'à Fermat :

» COROLLARIUM PRIMUM. — *Tangens EF æqualis est diametro AD.*

» Quia enim, in triangulo CEF rectangulo ad E, ex angulo E deducta est ad basim CF perpendicularis EB, erunt similia triangula CEF, CEB et EFB; sed BC est dimidia ipsius BE, ex constructione : ergo CE dimidia est ipsius EF. Est autem et CE dimidia diametri AD : ergo EF æqualis est ipsi AD.

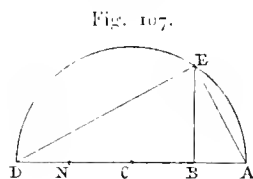
» COROLLARIUM SECUNDUM. — Ex præcedente corollario deducitur elegans *constructio problematis* et multo facilior, quæ talis est.

» Sumatur in circumferentia circuli AED punctum quodcumque E, ex quo deducatur recta EF tangens circumulum, quæ sit æqualis diametro circuli AED; et sic dabitur punctum F, ex quo per centrum C ducatur FCD secans circumferentiam in A et D punctis. Jungantur EA, ED; erit AE altitudo cylindri maximi quæsiti et DE diameter basis ipsius cylindri.

» Demonstratio facilis est.

» COROLLARIUM TERTIUM. — Notatu dignum est DE esse ad EA in ratione majoris segmenti ad minus rectæ mediâ ac extremâ ratione divisæ.

» Fiat enim CN (fig. 107) æqualis CB : ergo ND æquabitur BA, et BN ipsi BE. Porro qua-



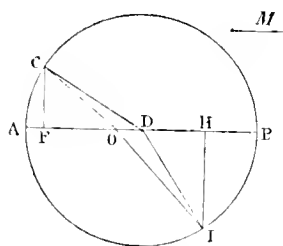
dratum ex DE æquale est rectangulo ADB sive duobus rectangulis : primo ADN (hoc est DAB), et rectangulo ex AD in NB (hoc est ex AD in BE); sed rectangulum DAB æquatur

VIII.

ANALYSIS AD REFRACTIONES ⁽¹⁾.

Esto circulus ACBI (Fig. 108), cujus diameter AFDB separet duo media diversae naturae, quorum rarius sit ex parte ACB, densius ex parte AIB. Ponatur centrum circuli punctum D, in quod incidat radius CD a puncto C dato. Queritur radius diaclasticus DI, hoc est punctum I ad quod vergit radius refractus.

Fig. 108.



Ducantur ad diametrum perpendiculares rectae CF, HI. Quum datum sit punctum C et diameter AB, necnon et centrum D, datur pariter punctum F et recta FD.

Sit ratio mediorum, sive ratio resistentiae medii densioris ad resistentiam medii rarioris, ut recta data DF ad datam extrinsecus rectam *M*, quae quidem minor erit recta DF, quum resistentia medii rarioris sit minor resistentiâ medii densioris, ex axioma plus quam naturali.

Mensurandi igitur veniunt motus, qui fiunt per rectas CD et DI, bene-

quadrato ex AE: rectangulum vero ex AD in BE aequatur rectangulo AED. Hoc est rectangulo ex linea composita AED in AE: erit igitur

ut tota linea AED ad DE, ita DE ad AE :

ergo AED recta secta est in E in extrema ac media ratione, estque DE majus segmentum, AE vero minus. Quod erat probandum.

De hoc problemate vide Tractatum Domini de Roberval *De conis et cylindris sphaera inscriptis et circumscriptis*: ibi enim verus est ejus locus. »

Le titre du Traité, auquel il est ainsi renvoyé, se retrouve dans une Lettre de Roberval à Hevelius, de 1650, qu'a publiée M. G. Henry (*Huygens et Roberval*, Leyde, 1879, p. 38).

(1) Ce morceau, tiré de la Correspondance de Descartes, fut envoyé par Fermat à M. de la Chambre, en même temps que la Lettre du 1^{er} janvier 1662.

licio rectarum M et DF : hoc est, motus, qui fit per duas rectas, representatur comparative per summam duorum rectangulorum, quorum unum fit sub CD et recta M , et alterum sub DI et recta DF .

Eo itaque deducetur quæstio, ut ita secetur diameter AB in puncto H ut, ductâ ab eo perpendiculari HI et junctâ DI , summa duorum rectangulorum sub CD et M et sub DI et DF contineat minimum spatium.

Quod ut secundum nostram methodum, quæ jam apud Geometras invaluit et ab Hérigone ⁽¹⁾ in *Cursu suo mathematico* ante annos plus minus viginti relata est, investigemus, radius CD datus vocetur N ; radius DI erit item N ; recta DF vocetur B et ponatur recta DH esse A . Oportet igitur N in $M + N$ in B esse minimam quantitatem ⁽²⁾.

Intelligatur quævis recta DO , ad libitum sumpta, esse æqualis ignotæ E , et jungantur rectæ CO , OL .

Quadratum rectæ CO , in terminis analyticis, erit

$$Nq. + Eq. - B \text{ in } E \text{ bis;}$$

⁽¹⁾ Dans le *Supplementum Cursus mathematici* de Pierre Hérigone (Paris, 1672: deuxième édition, 1677), qui forme le sixième Volume de l'Ouvrage, on trouve en effet, comme proposition XXVI et sous le titre *De maximis et minimis*, l'application de la méthode de Fermat à la solution des questions suivantes :

1. *Invenire maximum rectangulum contentum sub duobus segmentis propositæ rectæ lineæ* (voir plus haut, p. 134).

2. *Indagare maximum rectangulum comprehensum sub mediâ et differentia extremarum trium proportionalium.*

3. *Datum lineam secare in duo segmenta quæ habeant aggregatum suorum quadratorum omnium minimum.*

4. *Invenire maximum conorum rectorum sub æqualibus conicis superficiebus contentum.*

En outre de ces solutions, dans lesquelles Hérigone emploie d'ailleurs, comme dans tout son Ouvrage, son système particulier de notations algébriques, il donne, toujours d'après Fermat, la construction de la tangente en un point donné de la *parabole* (voir plus haut, p. 135), de l'*ellipse* (voir p. 145) et de l'*hyperbole*. Il ajoute enfin (p. 68) :

« Nec unquam fallit methodus, ut asserit ejus inventor, qui est doctissimus Fermat, consiliarius in parlamento Tolosano, excellens geometra nec ulli secundus in arte analytica : qui optime etiam restituit omnia loca plana Apollonii Pergæi, quæ in hac urbe vidimus manu scripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est etiam ab eodem auctore *Ad locos planos et solidos Isagoge*. »

Ce passage d'Hérigone a été reproduit par Samuel Fermat dans l'édition des *Varia* (à la dernière des pages non numérotées du commencement) ; mais, dans sa préface, il lui assigne à tort la date de 1637, qui est celle du premier Volume du *Cursus mathematicus*.

⁽²⁾ Dans tout ce morceau, on a rétabli la notation de Viète au lieu de celle de Descartes suivie par Clerselier.

quadratum vero recte OI erit

$$Aq. + Eq. + f \text{ in } E \text{ bis} :$$

ergo rectangulum sub CO in M erit in iisdem terminis

$$latus quadr. (Mq. in Nq. + Mq. in Eq. - Mq. in B in E bis);$$

rectangulum vero sub IO in B erit

$$latus quadr. (Bq. in Nq. + Bq. in Eq. + Bq. in f in E bis).$$

Hæc duo rectangula debent, ex præceptis artis, adæquari duobus rectangulis M in N et B in N .

Ducantur omnia quadraticæ, ut tollatur asymmetria; deinde, ablatis communibus et termino asymmetrico ex una parte collocato, fiat novus ductus quadraticus. Quo peracto, demptis communibus et reliquis per E divisus, ac tandem elisis homogeneis ab E affectis, juxta præcepta methodi quæ dudum omnibus innotuit, et facto parabolismo, fit tandem simplicissima æquatio inter A et M : hoc est, a primo ad ultimum abruptis omnibus asymmetriarum obicibus, recta DH in figura fit æqualis rectæ M .

Unde patet punctum diaelasticum ita inveniri si, ductis rectis CD et CF , fiat ut resistantia medii densioris ad resistantiam medii rarioris, sive

$$\text{ut } B \text{ ad } M, \quad \text{ita recta } FD \text{ ad rectam } DH,$$

et a puncto H excitetur recta HI ad diametrum perpendicularis et circulo occurrens in puncto I , quo refractione verget: ideoque radius a medio raro ad densum pertingens frangetur versus perpendicularem, quod congruit omnino et generaliter invento theoremati Cartesiano, cujus accuratissimam demonstrationem a principio nostro derivatam exhibet superior analysis.

IX.

<SYNTHESIS AD REFRACTIONES> ⁽¹⁾.

Proposuit doctissimus Cartesius refractionum rationem experientiae, ut aiunt, consentaneam; sed, eam ut demonstraret, postulavit et necesse omnino fuit ipsi concedi, luminis motum facilius et expeditius fieri per media densa quam per rara, quod lumini ipsi naturali adversari videtur.

Nos itaque, dum a contrario axioma — motum nempe luminis facilius et expeditius per media rara quam per densa procedere — veram refractionum rationem deducere tentamus, in ipsam tamen Cartesii proportionem incidimus. An autem contrariâ omnino viâ eidem veritati occurrî possit ἀπαραλόγως, videant et inquirant subtiliores et severiores Geometrae; nos enim, missâ mathematicâ, satius existimamus veritate ipsa indubitanter potiri, quam superfluis et frustatoriis contentionibus et jurgiis diutius inherere.

Demonstratio nostra unico nititur postulato : *naturam operari per modos et vias faciliores et expeditiores*. Ita enim ἀπλῶς concipiendum censemus, non, ut plerique, *naturam per lineas brevissimas semper operari*.

Ut enim Galileus ⁽²⁾, dum motum naturalem gravium spectatur, rationem ipsius non tam spatio quam tempore metitur, pari ratione non brevissima spatia aut lineas, sed quæ expeditius, commodius et breviori tempore percurri possint, consideramus.

(1) Ce second morceau sur la loi de la réfraction, confondu avec le précédent dans la Correspondance de Descartes, en est évidemment distinct : c'est le travail que Fermat promet à M. de la Chambre à la fin de sa lettre du 1^{er} janvier 1662, si celui-ci le lui réclame, et c'est également à cette pièce que se réfère particulièrement Clerselier, dans sa lettre à Fermat du 20 mai 1662. D'après la copie de Clerselier, l'envoi à M. de la Chambre aurait eu lieu en février 1662.

(2) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nove scienze attenenti alla Meccanica ed i movimenti locali*, del Sig^r Galileo Galilei (Leyde, Elzévir, 1638). — Les nouvelles pensées de Galilée, etc., traduit de l'italien en français (Paris, Pierre Rocolet ou Henry Guenon, 1639).

tionem brevissimo tempore a puncto M ad punctum H perveniat : probabile namque est naturam, quæ operationes suas quam citissime urget, eo sponte collimaturam. Si itaque summa rectarum IN, NH, quæ est mensura motus per inflexam MNH, sit minima quantitas, constabit propositum.

Hoc autem ex theoremate Cartesiano deduci vera, non fucata, Geometria statim demonstrabit; proposuit quippe Cartesius :

Si a puncto M ducatur radius MN, et ab eodem puncto M demittatur perpendicularis MD, fiat autem

ut velocitas major ad minorem, ita DN ad NS,

a puncto autem S excitetur perpendicularis SH et jungatur radius NH, lumen a medio raro in punctum N incidens refringi in medio denso versus perpendicularem ad punctum H.

Huic vero theoremati Geometria nostra, ut constabit ex sequenti propositione pure geometrica, non refragatur.

Esto circulus AIBM, cujus diameter ANB, centrum N, in cujus circumferentia sumpto quovis puncto M, jungatur radius MN et demittatur in diametrum perpendicularis MD. Detur pariter ratio DN ad NS et sit DN major ipsâ NS. A puncto S excitetur ad diametrum perpendicularis SH occurrens circumferentiæ in puncto H, a quo jungatur centro N radius HN. Fiat

ut DN ad NS, ita radius MN ad rectam NI :

Aio summam rectarum IN, NH esse minimam : hoc est, si sumatur, exempli gratia, quodlibet punctum R ex parte semidiametri NB, et jungantur rectæ MR, RH, fiat autem

ut DN ad NS, ita MR ad RP,

summam rectarum PR et RH esse majorem summâ rectarum IN et NH.

Quod ut demonstremus, fiat

ut radius MN ad rectam DN, ita recta RN ad rectam NO,

et

ut DN ad NS, ita fiat NO ad NV.

Ex constructione patet rectam NO minorem esse rectâ NR, quia recta DN est minor radio MN; patet etiam rectam NV minorem esse rectâ NO, quum recta NS sit minor rectâ ND.

His positis, quadratum rectæ MR æquatur quadrato radii MN, quadrato rectæ NR et rectangulo sub DN in NR bis, ex Euclide; sed, quum sit, ex constructione,

ut MN ad DN, ita NR ad NO,

ergo rectangulum sub MN in NO æquatur rectangulo sub DN in NR, ideoque rectangulum sub MN in NO bis æquatur rectangulo sub DN in NR bis : quadratum igitur rectæ MR æquatur quadratis MN et NR et rectangulo sub MN in NO bis.

Quadratum autem rectæ NR est majus quadrato rectæ NO, quum recta NR sit major rectâ NO : ergo quadratum rectæ MR est majus quadratis rectarum MN, NO et rectangulo sub MN in NO bis. At hæc duo quadrata, MN, NO, una cum rectangulo sub MN in NO bis, sunt æqualia quadrato quod fit ab MN, NO tanquam ab una recta : ergo recta MR est major summâ duarum rectarum MN et NO.

Quum autem, ex constructione, sit

ut DN ad NS, ita MN ad M et ita NO ad NV,

ergo erit

ut DN ad NS,

ita summa rectarum MN, NO ad summam rectarum IN et NV.

Est autem etiam

ut DN ad NS, ita MR ad RP :

ergo

ut summa rectarum MN, NO ad summam rectarum IN, NV,

ita recta MR ad RP.

Est autem recta MR major summâ rectarum MN, NO : ergo et recta PR est major summâ rectarum IN, NV.

Superest probandum rectam RH esse majorem rectâ HV; quo per-
aeto, constabit summam rectarum PR, RH esse majorem summâ rec-
tarum IN, NH.

In triangulo NHR, quadratum RH æquatur quadratis HN, NR mule-
tatis rectangulo sub SN in NR bis, ex Euclide. Quum autem sit, ex con-
structione,

ut MN radius (sive NH ipsi æquatis) ad DN, ita NR ad NO,

ut autem DN ad NS, ita NO ad NV,

ergo, ex æquo, erit

ut HN ad NS, ita NR ad NV.

Rectangulum ergo sub HN in NV æquale est rectangulo sub NS in NR,
ideoque rectangulum sub HN in NV bis æquatur rectangulo sub SN
in NR bis : quare quadratum HR æquatur quadratis HN, NR mule-
tatis rectangulo < sub > HN < in > NV bis.

Quadratum vero NR probatum est majus esse quadrato NV : ergo
quadratum HR majus est quadratis HN, NV mule-
tatis rectangulo < sub > HN < in > NV bis. Sed quadrata HN, NV mule-
tata rectan-
gulo < sub > HN < in > NV bis æqualia sunt, ex Euclide, quadrato
rectæ HV : ergo quadratum HR quadrato HV majus est, ideoque recta
HR major rectâ HV. Quod secundo loco fuit probandum.

Quod si punctum R sumatur ex parte semidiametri AN, licet rectæ MR,
RH sint in directum et rectam lineam constituent, ut in secunda figura
(fig. 110), — demonstratio enim est generalis in quolibet casu —
idem continget : hoc est, rectarum PR, RH summa erit major summâ
rectarum IN, NH.

Fiat, ut supra,

ut MN radius ad DN, ita RN ad NO,

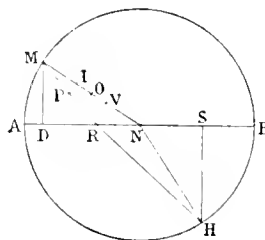
et

ut DN ad NS, ita NO ad NV :

patet rectam RN esse majorem rectâ NO, rectam vero NO esse majorem
rectâ NV.

Quadratum MR æquatur quadratis MN, NR muletatis rectangulo DNR bis sive, ex superiori ratiocinio, rectangulo MNO bis. Quum autem quadratum NR sit majus quadrato NO, ergo quadratum MR erit majus quadratis MN, NO muletatis rectangulo MNO bis; sed quadrata MN, NO, muletata rectangulo MNO bis, æquantur quadrato

Fig. 110.



rectæ MO : ergo quadratum rectæ MR quadrato rectæ MO majus erit, ideoque recta MR erit etiam major rectâ MO.

Quum autem sit, ex constructione,

$$\text{ut DN ad NS, ita MN ad IN et ita NO ad NV,}$$

ergo

$$\text{ut MN ad IN, erit NO ad NV,}$$

et, vicissim,

$$\text{ut MN ad NO, ita erit NI ad NV,}$$

et, dividendo,

$$\text{ut MO ad ON, ita IV ad VN,}$$

et, vicissim,

$$\text{ut MO ad IV, ita ON ad NV, sive DN ad NS, sive MR ad RP.}$$

Probatum est autem MR ipsâ MO esse majorem : ergo PR rectâ IV major erit. Superest ergo probandum, ut ex omni parte constet propositum, rectam RH esse majorem summâ duarum rectarum HN et NV; quod ex predictis est facillimum.

Quadratum enim RH æquatur quadratis HN, NR una cum rectangulo sub SN in NR bis sive, ex prædemonstratis, una cum rectangulo sub HN in NV bis; quadratum autem NR est majus quadrato NV : ergo

quadratum HR majus est quadratis HN , NV una cum rectangulo sub HN in NV bis. Unde sequitur rectam RH , ex superius demonstratis, esse majorem summâ rectarum HN , NV .

Patet itaque rectas PR , RH (sive unicam rectam PRH quando id contingit) esse semper majores duabus rectis IN , NH . Quod erat demonstrandum.



NOVUS SECUNDARUM
ET
ULTERIORIS ORDINIS RADICUM
IN ANALYTICIS USUS.

Reductio secundarum et ulterioris ordinis radicum ad primas, quæ maximi est in Algebraicis momenti, unicam pro fundamento agnoscit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progressus ipse quæstionis ostendit.

Proponatur

$$A \text{ cubus} + E \text{ cubo} = \text{æquari} \quad Z \text{ solido};$$

item

$$B \text{ in } A + E \text{ quad.} + D \text{ in } E = \text{æquari} \quad N \text{ quad.}$$

Ut secunda radix devolvatur ad primam, hæc sunt præcepta :

Quaecumque a secunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem transeunto : ut, in superiori exemplo, quum

$$Ac. + Ec. = \text{æquatur} \quad Zs.,$$

ergo

$$Zs. - Ac. = \text{æquabitur} \quad Ec.$$

Similiter, quum

$$B \text{ in } A + Eq. + D \text{ in } E = \text{æquatur} \quad Ng.,$$

ergo

$$Ng. - B \text{ in } A = \text{æquabitur} \quad Eq. + D \text{ in } E.$$

In utraque igitur æquatione homogenea abs E (sive abs secunda radice) adfecta unam æquationis partem constituunt; si igitur duplicata

ejusmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit

$$\text{ut } Zs. - Ac. \text{ ad } Ec., \quad \text{ita } Nq. - B \text{ in } A \text{ ad } Eq. + D \text{ in } E.$$

Quum itaque factum sub extremis comparabitur facto sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea divisionem admittent per E (sive per secundam radicem); ut patet, quia secundus et quartus terminus abs E adficiuntur.

Erit nempe

$$\begin{aligned} Zs. \text{ in } Eq. - Ac. \text{ in } Eq. + Zs. \text{ in } D \text{ in } E - Ac. \text{ in } D \text{ in } E \\ \text{æquale} \quad Nq. \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Ec. \end{aligned}$$

Omnia dividantur toties per E, donec aliquod ex homogeneis adfectione sub E omnino liberetur: erit

$$\begin{aligned} Zs. \text{ in } E - Ac. \text{ in } E + Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D \\ \text{æquale} \quad Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. \end{aligned}$$

Quo peracto, nova hæc æquatio uno ad minus gradu depressior erit (quoad secundam radicem) quam elatior ex duabus primum propositis: patet nempe elatiorem ex duabus primum propositis adfici sub cubo E, istius vero nullam abs E adfectionem excedere Eq.

Nec tamen sic quiescendum, sed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio secundæ radicis fiat tantum sub latere, ut asymmetria omnis evanescat.

Preparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præscriptum, ut homogenea sub E quomodocumque adfecta unam æquationis partem faciant. Erit itaque

$$\begin{aligned} Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D \quad \text{æquale} \\ Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Zs. \text{ in } E + Ac. \text{ in } E. \end{aligned}$$

Sed, ex duabus primum propositis, quæ depressior est, exhibet æquationem sequentem, ut diximus:

$$Nq. - B \text{ in } A \quad \text{æquale} \quad Eq. + D \text{ in } E.$$

Revocetur rursum ad analogiam duplicata ista æqualitas : erit itaque

$$\begin{array}{lcl} Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D & \text{ad } Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Zs. \text{ in } E + Ac. \text{ in } E \\ \text{ut } Nq. - B \text{ in } A & \text{ad } Eq. + D \text{ in } E. \end{array}$$

Quum itaque factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E, ut supra demonstratum est : erit nempe

$$\begin{array}{l} Zs. \text{ in } D \text{ in } Eq. + Zs. \text{ in } Dq. \text{ in } E - Ac. \text{ in } D \text{ in } Eq. - Ac. \text{ in } Dq. \text{ in } E \\ \text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } Eq. - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Nq. \text{ in } Zs. \text{ in } E \\ \quad + Nq. \text{ in } Ac. \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } Eq. \\ \quad - Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } Eq. + B \text{ in } Zs. \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } Aqq. \text{ in } E. \end{array}$$

et, omnibus abs E divisis, fiet tandem

$$\begin{array}{l} Zs. \text{ in } D \text{ in } E + Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } D \text{ in } E - Ac. \text{ in } Dq. \\ \text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } E - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E - Nq. \text{ in } Zs. + Nq. \text{ in } Ac. \\ \quad - B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } E + B \text{ in } Zs. \text{ in } A - B \text{ in } Aqq. \end{array}$$

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradus depressionem (quoad secundam radicem) lucrata est, ut hic patet : quum enim homogenea sub E adfecta in unam æquationis partem transierint, fiet

$$\begin{array}{l} Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } Dq. + Nq. \text{ in } Zs. - Nq. \text{ in } Ac. - B \text{ in } Zs. \text{ in } A + B \text{ in } Aqq. \\ \text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } E - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } E \\ \quad + Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } E - Zs. \text{ in } D \text{ in } E + Ac. \text{ in } D \text{ in } E. \end{array}$$

Neque ulterius progrediendum, quum jam secunda radix sub latere tantum appareat, ideoque, solo applicationis beneficio, ipsius E relatio ad primam radicem manifestabitur : ut hic

$$\frac{Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } Dq. + Nq. \text{ in } Zs. - Nq. \text{ in } Ac. - B \text{ in } Zs. \text{ in } A + B \text{ in } Aqq.}{Nqq. - Nq. \text{ in } B \text{ in } A - Nq. \text{ in } B \text{ in } A + Bq. \text{ in } Aq. - Zs. \text{ in } D + Ac. \text{ in } D}$$

æquabitur E,

quo tendendum erat.

Ut igitur duæ primum propositæ radices in unam transeant, resu-

matur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris; depressior tamen idonea magis, ne altius ascendat æquatio.

Quum itaque in una ex æquationibus primum propositis

$$B \text{ in } A + E q. + D \text{ in } E \quad \text{æquetur} \quad N q.,$$

loco ipsius E subrogetur jam agnitus ejus valor per relationem vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo proposito est A: et rursum sub hac nova specie ordinetur æquatio. Manifestum est evanuisse omnino secundam radicem et in æquationem ab omni asymmetria liberam itum esse, methodumque esse generalem.

Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata tertias, si opus fuerit, radices ad primas et secundas, deinde secundas ad primas, etc., eodem prorsus artificio reducet.

APPENDIX AD SUPERIOREM METHODUM ⁽¹⁾.

Superiori methodo debetur perfecta et absoluta asymmetriarum in Algebraicis expurgatio; neque enim symmetrica climactismus Vietæ ⁽²⁾, quæ unicum hactenus ad asymmetrias fuit remedium, efficax satis et sufficiens inventa est.

Proponatur quippe

$$\begin{aligned} &\text{lat. cub. } (B \text{ in } A q. - A c.) + \text{lat. quad. } (A q. + Z \text{ in } A) \\ &\quad + \text{lat. quad. quad. } (D c. \text{ in } A - A q q.) + \text{lat. quad. } (G \text{ in } A - A q.) \\ &\text{æquari} \quad \text{rectæ } N. \end{aligned}$$

Qua ratione ab asymmetriis hujusmodi extricabit se et quæstionem suam analysta Vietæus? An non potius, dum crescit labor, crescit dif-

⁽¹⁾ Voir la lettre de Fermat à Carcavi, du 20 août 1650, lettre qui accompagnait l'envoi de tout le *Traité*. Voir également le billet de Fermat dans la lettre de Descartes (éd. Clerkschier, III, 83) du 18 décembre 1648, billet qui semble aussi avoir été adressé primitivement à Carcavi.

⁽²⁾ VIÉTÉ. *De emendatione æquationum*, cap. V (éd. Schooten. p. 140).

ficultas, et tandem, fatigatus et delusus, novum ab Analytice lumen exposcet?

Hoc sane luculenter superior methodus subministrat : unicum exemplum, idque brevissimum, adjungimus; recluso enim semel fundamento, cætera apertissime manifestantur.

Proponatur

$$\text{lat. cub.}(Z \text{ in } Aq. - Ac.) + \text{lat. cub.}(Ac. + Bq. \text{ in } A) = \text{aquare} = D.$$

Ita primum ordinetur æquatio ut unica ex asymmetriis unam illius partem faciat : fiat nempe

$$D - \text{lat. cub.}(Ac. + Bq. \text{ in } A) = \text{æqualis} = \text{lat. cub.}(Z \text{ in } Aq. - Ac.).$$

Hoc peracto, omnes termini asymmetri a secundis et ulterioribus, si opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo quem unicum in unam æquationis partem rejecimus : fingatur, verbi gratia,

$$\text{lat. cub.}(Ac. + Bq. \text{ in } A) \text{ esse } E.$$

Hac enim via ad eam, quam injungit superior methodus, duplicata æqualitatis analogiam deveniemus : erit nempe

$$D - E = \text{æqualis} = \text{lat. cub.}(Z \text{ in } Aq. - Ac.),$$

et, omnibus in cubum ductis,

$$Dc. + D \text{ in } Eq. \text{ ter} - Dq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec. = \text{æquabitur} = Z \text{ in } Aq. - Ac.$$

Sed, ex hypothesi,

$$Ec. = \text{æquatur} = Ac. + Bq. \text{ in } A.$$

Ergo oritur duplicata æqualitas et in utraque, juxta methodum, termini abs secunda radice adfecti in unam æquationis partem sunt conjiciendi : erit nempe

$$Z \text{ in } Aq. - Ac. - Dc. = \text{æqualis} = D \text{ in } Eq. \text{ ter} - Dq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.;$$

item

$$Ac. + Bq. \text{ in } A = \text{æqualis} = Ec.$$

Iteretur toties operatio donec secunda radix ad primam revocetur :

quo peracto, loco ipsius E, novus ipsius valor usurpetur et sub hac nova specie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur : omnia constabunt.

Nec inutilia adjungo, aut moror in superfluis : quis enim non videt singulos terminos asymmetros posse eadem ratione, si non sufficiant secundæ radices, tertiis, quartis, etc. in infinitum insigniri? Quo casu, quartam, sive ultimam, radicem tanquam secundam considerabis : reliquas vero tantisper vel pro primis vel pro terminis cognitis habebis, donec ultima illa omnino evanuerit sive ad primas, secundas et tertias reducta fuerit. Simili prorsus artificio tertias reduces ad secundas et primas, ac denique secundas ad primas, ut jam sæpius inculcavimus.

Nulla est ergo asymmetria quam non cogat exulare hæc methodus, cujus usus præsertim eximius, imo et necessarius, in numerosa potestatum resolutione. Statim enim nempe atque asymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum ⁽¹⁾ in arithmeticeis quæstionibus artificium et, si veris explicari numeris quæstio non possit, proximæ quantumvis libuerit suppetent solutiones, quum tamen proximas veris solutiones nullo pacto, quamdiu duraverint asymmetriæ, consequi possis.

Sed et ulterius inquirenti obtulit se mira ad locorum superficialium plenam et perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ et iis problematis inservit, in quibus dantur ab initio plura quam requirat ipsa problematis construendi determinatio.

Quod ut clarius intelligas, sunt quedam problemata quæ unicam tantum agnoscunt positionem ignotam, quæ vocari possunt determinata, ad differentiam inter ipsa et problemata localia constituendam. Sunt alia quedam quæ duas positiones ignotas habent et ad unicam tantum nunquam possunt reduci : ea problemata sunt localia.

In prioribus illis unicum tantum punctum inquiremus, in istis lineam; sed, si problema propositum tres ignotas positiones admittat,

⁽¹⁾ Fermat fait allusion au *Traité De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad eægesin resolutione* de VIÈTE (éd. Schooten, p. 162-228).

problema hujusmodi non jam punctum duntaxat, aut lineam tantum, sed integram superficiem quæstioni idoneam investigat : indeque oriuntur loci ad superficiem, etc. in reliquis. Sicut autem in prioribus data ipsa sufficiunt ad determinationem quæstionis, ita in secundis unum datum deest ad determinationem, in tertiis vero duo tantum data determinationem possunt complere.

At contra potest fieri ut, quemadmodum in his casibus data aut sufficiant aut desint, ita in plerisque aliis data ipsa superflua sint et abundant : exemplo res fiet evidens.

In recta AC (*fig. 94*) data, datur rectangulum ABC; datur etiam differentia quadratorum AB et BC.

Fig. 94.



In hoc casu plura patet offerri data quam determinatio ideoque solutio ipsius quæstionis exposcat. Frequentissimus tamen horum problematum, in Physicis præsertim et apud artifices, est usus, eaque omnia per applicationem simplicem beneficio nostræ methodi expediuntur, neque recurrendum ad extractionem radicum, licet æquationes ad quasvis potestates ascendant.

Proponatur, verbi gratia, in quadam quæstione,

$$A \text{ cub.} + B \text{ quad. in } A \quad \text{æquari} \quad Z \text{ quad. in } B;$$

item etiam, quum ex hypothesi quæstio supponatur esse abundans (has enim quæstiones *abundantes*, sicut locales *deficientes*, appellare consuevimus),

$$G \text{ sol. in } A - A \text{ quad. quad.} \quad \text{æquari} \quad B \text{ quad. in } N \text{ pl.}$$

Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur et, ex præscripta methodo, consideretur unica nostra radix ignota, quæ in hoc exemplo est A, sicut in præcedentibus secundam aut ulterioris ordinis radicem consideravimus, et toties, juxta methodum, iteretur operatio donec adfectio sub A per simplicem applicationem possit expediri, sive non

tam ad primas radices quam ad terminos omnino notos reduci. Patebit solutio problematis simplicissima, nec analystam deinceps æquationes quadraticæ, cubicæ, quadratoquadraticæ, etc. remorabuntur.

LIBET et, coronidis loco, famosi illius problematis :

Datis ellipsi et puncto extra ipsius planum, superficiem conicam, cujus vertex sit punctum datum et basis ellipsis data, ita plano secare ut sectio sit circulus.

solutionem, quæ huic methodo debetur, indicare, eamque simplicissimam.

Eo deducunt questionem Geometræ ut, sumptis quinque punctis ad libitum in ellipsi et junctis rectis a vertice conicæ superficiæ ad puncta illa, per junctas quinque rectas circulum describant; inveniuntque problema hoc pacto esse solidum. Sed, quum puncta in ellipsi sint infinita, si loco quinque punctorum sumantur sex, fiet problema abundans et orietur necessario duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per simplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione, si detur quæcumque linea curva in plano aut etiam superficies localis, cujuscumque tandem gradûs sint, invenientur diametri et axes figurarum; imo et in superficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci superficialis constitutivæ, etc.

Exponatur, verbi gratia, superficies conica, cujus vertex sit punctum datum, basis vero parabole aut ellipsis cubica aut quadratoquadratica aut ulterioris in infinitum gradus. Potest hujusmodi superficies conica, beneficio istius methodi, ita secari ut in ea exhibeatur quælibet curva quæ, ex constitutione figuræ, in ea superficie potest describi, et problematis solutio semper evadet simplicissima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum (¹) et plerisque aliis hujus methodi usibus : fient quippe obvii nec sedulam indagatoris analytici meditationem effugient.

(¹) Voir plus haut, page 153.

〈 AD ADRIANI ROMANI PROBLEMA 〉⁽¹⁾.

VIRO CLARISSIMO CHRISTIANO HUGGENIO P. F. S. T. ⁽²⁾.

Dum Francisci Vietae ⁽³⁾ celebre illud *Ad problema Adriani Romani responsum* accuratius anno superiore examinarem, et in verba capitis sexti incidissem quibus profitetur subtilis ille mathematicus haud scire se « an ipsemet » Adrianus « ejus quam proposuit aequationis genesim et symptomata pernoverit », subvenire cepit an ipsemet quoque Vieta aequationis illius famosae satis generalem tradiderit aut invenerit solutionem.

Proponentis quippe Adriani Romani verba haec sunt, emendante Vieta ⁽⁴⁾ :

Detur in numeris algebricis

$$\begin{aligned}
 & 45 \textcircled{1} - 3795 \textcircled{3} + 95634 \textcircled{5} - 1138500 \textcircled{7} \\
 + & 7811375 \textcircled{9} - 34512075 \textcircled{11} + 105306075 \textcircled{13} - 232676280 \textcircled{15} \\
 + & 384942375 \textcircled{17} - 488494125 \textcircled{19} + 483841800 \textcircled{21} - 378658800 \textcircled{23} \\
 + & 236030652 \textcircled{25} - 117679100 \textcircled{27} + 46955700 \textcircled{29} - 14945040 \textcircled{31} \\
 + & 3764565 \textcircled{33} - 740259 \textcircled{35} + 111150 \textcircled{37} - 12300 \textcircled{39} \\
 + & 945 \textcircled{41} - 45 \textcircled{43} + 1 \textcircled{45} \textit{ aequalis numero dato;}
 \end{aligned}$$

quaeritur valor radiceis.

⁽¹⁾ Ce morceau, qui, comme le précédent, concerne les travaux de Fermat sur Viète, a été publié par M. Ch. Henry (*Recherches, etc.*, p. 211-213) d'après le manuscrit Huygens 30 de l'Université de Leyde.

⁽²⁾ Lisez : Petrus Fermatius, senator Tolosanus.

⁽³⁾ VIÈTE, édition Schooten ou des Elzéviros, pages 305-324.

⁽⁴⁾ De fait, Fermat ne cite exactement ici ni l'énoncé d'Adrien Romain, dont il a toutefois conservé les notations, ni la formule adoptée par Viète, page 308.

Sane perquam eleganter et doctissime, suo more, quæstionem propositam abduxit Vieta ad sectiones angulares et tabulam feliciter construxit, pag. 318 editionis Elzevirianæ ⁽¹⁾, ad quotlibet in infinitum terminos, methodo qua usus est, facile extendendam, cujus beneficio dignoscitur quanam æquationes ad speciales angulorum sectiones pertineant.

Si enim, in sedibus numerorum imparium, sumatur primo

$$1C - 3N \quad \text{æqualis} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit major binario, reducitur quæstio ad trisectionem anguli. Si deinde

$$1QC - 5C + 5N \quad \text{æquetur} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit etiam binario major, reducitur quæstio ad quintusectionem anguli. Si

$$1QQC - 7QC + 14C - 7N \quad \text{æquetur} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit item binario major, reducitur quæstio ad septusectionem; et si tabulam in infinitum extendas, juxta methodum a Vieta præscriptam, terminus æquationis ab Adriano propositæ erit quadragesimus quintus tabulæ, et questionem ad inveniendam quadragesimam quintam anguli dati partem deducet.

Verum observandum est in his omnibus æquationibus contingere, ut iis solum ipsarum casibus inserviant sectiones angulares et methodus Vietae, in quibus numerus datus, cui proponitur æquandus quilibet in numeris algebricis tabulæ terminus, binarium non excedit, ut jam diximus : si enim numerus datus sit binario major, silet statim omne sectionum angularium mysterium et ad quæstionis propositæ solutionem inefficax dignoscitur.

Proposuerat tamen generaliter Adrianus *dato termino posteriore, inve-*

⁽¹⁾ Théorème V du Traité de VIÈTE : la Table, poussée seulement jusqu'au neuvième terme, et qui se trouve à la page 319, donne en fait le développement de $2\cos nx$ suivant les puissances de $2\sin x$, si n est pair, ou de $2\cos x$, si n est impair. Le premier membre de l'équation d'Adrien Romain est précisément le développement de $2\cos 15x$ suivant les puissances de $2\cos x$.

niendum esse priorem : aliunde igitur quam a Vieta et a sectionibus angularibus petendum auxilium.

Proponatur, in primo casu, $1C - 3N$ æquari numero qui non sit binario major, reducitur quæstio ad trisectionem, ut jam indicavimus. Sed, si $1C - 3N$ æquetur 4 vel alteri cuilibet numero binario majori, tunc æquationis propositæ solutionem per methodum Cardani analystæ expediunt. An autem, in ulterioribus in infinitum casibus, solutiones per radicum extractionem fieri possint, nondum ab analystis tentatum fuit; quidni igitur in hac parte Algebram liceat promovere, tuis præcipue, Huggeni Clarissime, auspiciis, quem in his scientiis adeo conspicuum eruditi omnes merito venerantur ⁽¹⁾?

Proponatur itaque

$$1QC - 5C + 5N \quad \text{æquari} \quad \text{numero } 4$$

vel alteri cuilibet binario majori. Obmutescet in hoc casu methodus Vietae; hoc itaque, ut generaliter Adriano proponenti satisfiat, confidenter pronuntiamus : in omnibus omnino tabulae prædictæ casibus, quoties numerus datus est binario major, solutiones propositæ quæstionis per extractionem radicum commodissime dari posse.

Observavimus quippe, imo et demonstravimus, in omnibus illis casibus, quæstiones posse deduci, sicut in cubicis ad quadraticas a radice cubica, ex methodo Cardani et Vietae ⁽²⁾, sic in quadratocubicis ad quadraticas a radice quadratocubica, in quadratoquadratocubicis ad quadraticas a radice quadratoquadratocubica, et ita uniformi in infinitum progressu.

Sit

$$1C - 3N \text{ æqualis } 4,$$

⁽¹⁾ Lors de l'envoi par Fermat de ce travail (en 1661?). Huygens était déjà célèbre, non seulement pour ses découvertes astronomiques et son application du pendule aux horloges, mais pour ses travaux de Mathématique pure, quoiqu'on n'eût imprimé de lui que les *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli* (1651) et le *Traité De ratiociniis in ludo alexæ* (1657).

⁽²⁾ On sait qu'en fait la méthode de Viète (*De emendatione æquationum*, cap. VI) n'est pas précisément identique à celle de Cardan ou plutôt de Ferrari (*Hieronymi Cardani Ars magna sive de regulis algebræ*, 1545).

verbi gratia. Norunt omnes radicem quæsitam, ex methodo prædicta, æquari

$$\text{radici cubicæ binomii } 2 + \sqrt{3} \text{ + radice cubica apotomes } 2 - \sqrt{3}.$$

Sed proponatur, in exemplo Vietæ et Adriani,

$$1QC = 5C + 5N \quad \text{æquari} \quad 4,$$

vel alteri cuilibet numero binario majori.

Fingemus, perpetuâ et ad omnes tabulæ casus producendâ in infinitum methodo, radicem quæsitam esse $\frac{1Q+1}{1N}$, cujus beneficio resolvendo hypostases, evanescent semper homogenea simplici per extractionem radicum quæstionis resolutioni contraria; et, in hoc casu ad exemplum præcedentis, radix proposita æquabitur

$$\begin{aligned} &\text{radici quadratocubicæ binomii } 2 + \sqrt{3} \\ &+ \text{radice quadratocubica apotomes } 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Si

$$1QQC = 7QC + 14C = 7N,$$

qui est numerus tabulæ septimus apud Vietam (ad exponentem namque maximæ potestatis, qui est in hoc casu 7, respicimus), æquetur similiter numero 4, fingatur, ut supra, radix quæsitâ esse $\frac{1Q+1}{1N}$: evanescent pariter in hoc casu homogenea omnia solutioni per extractiones radicum adversa, et radix quæsitâ æquabitur

$$\begin{aligned} &\text{radici quadratoquadratocubicæ binomii } 2 + \sqrt{3} \\ &+ \text{radice quadratoquadratocubica apotomes } 2 - \sqrt{3}; \end{aligned}$$

et sic in infinitum.

Quod tu, Vir Eruditissime, non solum experiendo deprehendes, sed et demonstrando, quandocumque libuerit, assequeris: ea enim est æquationum ex tabula Vietæ derivandarum specifica proprietas, ut semper ipsarum solutiones, in iis casibus in quibus homogeneum

comparationis est binario majus, simplices omnino extractionis radicum beneficio evadant.

Vel igitur numerus datus, termino tabulae analyticae æquandus, est binarius vel minor binario vel eodem binario major.

Primo casu semper radix proposita est ipse binarius.

Secundo devolvitur quaestio proposita secundum Vietam ad angulares sectiones.

Tertio per nostram methodum jam expositam, hoc est per extractionem radicum, facile expeditur.

Sit itaque numerus ille analyticus Adriani superius expositus

$$45 \textcircled{1} - 3795 \textcircled{3} \text{ etc.} \quad \text{æqualis} \quad \text{numero 4,}$$

radix quesita erit

$$\begin{aligned} \text{radix} \quad & \text{quadragesimæ quintæ potestatis binomii} \quad 2 + \sqrt[3]{3} \\ & + \text{radice quadragesimæ quintæ potestatis apotomes} \quad 2 - \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

Nec amplius in re perspicua et jam satis exemplificata immorandum, nisi quod monendum superest : extractionem radicis quadragesimæ quintæ potestatis, sive inventionem quadraginta quatuor mediarum proportionalium inter duas quantitates datas, expediri facillime per extractionem radicis cubicæ bis factam et extractionem radicis quadratocubicæ semel : quod numeri 5 et 9, qui numerum 45 metiuntur, satis indicant : 5 enim ad radicem quadratocubicam refertur et 9 ad radicem cubicam bis sumptam : ternarius enim, qui est cubi exponens, bis ductus novenarium producit.

Ideoque, per inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas bis factam et inventionem quatuor mediarum inter duas semel, inveniuntur quadraginta quatuor mediae et quaestioni nostræ satisfit, quemadmodum Vieta inventionem sectionis anguli in 45 partes, quæ est quaestio vel æquatio Adriani, ad æquationem cubicam bis factam et ad quadratocubicam semel, sive ad duplicem trisectionem et ad unicam quintusectionem, abduxit.

Nilil de multiplicibus æquationis vel quæstionis propositæ solutionibus adjungimus; primogenitam tantum representamus, de reliquis, quarum operosior est disquisitio, aliàs fortasse, si otium suppetat, fusius acturi.

Vale, Vir Clarissime, et me ama.



AD BON. CAVALIERII QUESTIONES RESPONSA ⁽¹⁾.

Dudum est ex quo, ad similitudinem *paraboles* Archimedææ, *reliquas in infinitum quadravimus in quibus abscissæ a diametro sunt inter se ut quævis applicatarum potestates*. Hanc scientiam, primis jam olim a nobis adinventam, Domino de Beaugrand aliisque communicavimus; fatendum tamen Dominum de Roberval, qui nobis indicantibus hujusmodi quæstiones est aggressus, earum solutiones suopte ingenio, quod perspicax et in his scientiis felicissimum habet, reperiisse.

Sed et pariter quoque centra gravitatum in his figuris et ab ipsis compositis deteximus, idque methodo nobis peculiari ⁽²⁾, cujus etiam beneficio tangentes in lineis quibuscumque curvis, ipsarumque

⁽¹⁾ Inédit, d'après deux copies, sans titre (l'une ancienne, l'autre d'Arbogast), dans les manuscrits du prince Boncompagni. — Ce morceau, adressé à Cavalieri par l'intermédiaire de Mersenne avant 1644, résume les premiers travaux de Fermat sur les quadratures et cubatures. Travaux dont il n'a d'ailleurs développé plus tard qu'une partie dans son dernier Traité : *De æquationum localium transmutatione, etc.*

Mersenne a reproduit presque textuellement la plus grande partie de ce morceau dans la *Prefatio ad Mechanicæ*, IV, de ses *Cogitata Physicomathematica*, où, venant de parler des quadratures obtenues par Roberval, qu'il appelle *noster Geometra*, il s'exprime ainsi sur les travaux de Fermat :

« Generalem etiam regulam vir alius summus invenit quæ prædicta solvit, non solum quando partes diametri cum applicatarum potestatibus conferuntur, sed etiam cum quolibet partium diametri potestates cum quibuslibet potestatibus applicatarum comparantur : quæ quia satis commodè figuræ præcedenti possunt eo modo intelligi quo ipse voluit, me requirente, Bonaventuræ Cavalliero Geometræ subtilissimo innotescere, iisdem Lector noster perfruat. »

Il termine comme suit la reproduction du texte de Fermat (d'ailleurs sur la même figure) :

« Si vero figuræ circumvolvatur circa EF, solidum quaeratur, non simplex, uti superiora, sed compositum, cujus rationem ad cylindrum ambiens, et centrum gravitatis vir idem summus, et noster Geometra dudum eruere : a quibus tam omnium curvarum tangentes, quam areas, solida, et centra gravitatis omnium figurarum curvis, et rectis comprehensarum, posses accipere. »

⁽²⁾ Voir plus haut, page 136.

asymptotos, imo et quaecumque ad inventionem maximæ et minimæ pertinent problemata, feliciter construximus.

Sed ad rem : querit eruditissimus Bonaventura Cavalieri *quid de predictis quadrationibus sit definiendum*. Huius operi regulam generalem aptavimus, cujus ope non tantum quando partes diametri cum potestatibus applicatarum conferuntur, solutionem damus, sed et quum quælibet partium diametri potestates cum quibuslibet applicatarum potestatibus comparantur : ita enim generaliter pronuntiamus.

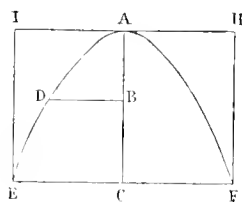
Sit figura quævis parabolica, si placet, EAF (*fig. 111*), sitque, exempli causa,

ut cubus CA ad cubum BA,
ita quadratoquadratum EC ad quadratoquadratum DB.

Sumo exponentes potestatum tam in applicatis quam in diametro. Exponens quadratoquadrati est 4 in applicatis, exponens cubi in diametro est 3.

Aio igitur parallelogrammum EH esse ad figuram EAF ut summa

Fig. 111.



exponentium ambarum potestatum ad exponentem potestatis applicatarum. Erit igitur in hoc exemplo

parallelogrammum ambiens ad figuram EAF ut 7 ad 4.

Hinc patet, si sit, verbi gratia,

ut quadratoquadratum EC ad quadratoquadratum DB,
ita CA simpliciter ad AB,

quum exponent lateris sit unitas, ideo

parallelogrammum ad figuram hoc casu esse ut 5 ad 4.

Nec est dissimilis in omnibus omnino hujusmodi figuris in infinitum progressus.

Verum igitur est quod dubitanter proponebat Vir doctissimus, nempe quum potestates applicatarum cum longitudine tantum portionum diametri, sive, ut loquuntur analytæ, cum latere conferuntur :

$$\text{parallelogrammum esse} \left\{ \begin{array}{l} \text{trianguli duplum,} \\ \text{ad parabolæ ut 3 ad 2,} \\ \text{ad parabolæ cubicam ut 4 ad 3,} \\ \text{ad quadratoquadraticam ut 5 ad 4,} \\ \text{etc., in infinitum.} \end{array} \right.$$

Sed si, manente recta CA, figura circumducatur ut fiat solidum, invenitur proportio cylindri EH ad hujusmodi solidum, hoc pacto :

Summa dupli exponentis potestatis in diametro et exponentis potestatis in applicatis semel sumpti, ad exponentem potestatis in applicatis est ut cylindrus ad solidum.

Exemplum : esto

ut cubus EC ad cubum DB, ita quadratum CA ad quadratum BA.

Exponens quadrati in diametro est 2, cujus duplum 4; junctum 3, exponenti potestatis in applicatis semel sumpto, facit 7 : est igitur

ut 7 ad 3 (exponentem potestatis in applicatis), ita cylindrus ad solidum.

Quo posito, secundæ quæstioni fit satis.

Centra gravitatum, in omnibus hujusmodi figuris, tam planis quam solidis, secant diametros in proportionem vel parallelogrammi ad figuram planam, vel cylindri ad solidum.

Sed, si figura circumvolvatur circa EF, fit jam solidum non simplex, ut superiora, sed compositum. Ejus tamen proportio ad cylindrum ambientem facillime ex simplicibus accuratus Geometra derivabit, imo et ipsam centri gravitatis positionem. Quæ tamen omnia, si placeat Domino Bonaventuræ, demonstrative et prolixius exsequemur.

Dum quærit *an curvæ ultra triangulum et parabolæ* (¹) *possint esse conicæ sectiones*, non videtur meminisse singularum proprietatis : tam enim hoc \leq est \geq impossibile quam sectionem sphaeræ per planum dare parabolæ aut hyperbolæ aut ellipses.

Et, horum vice, problemata quædam ex Italia communicet, ex animo rogamus.

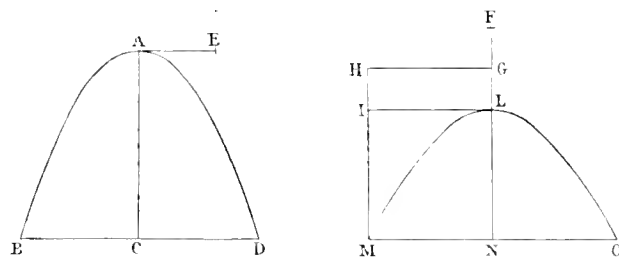
¹ Cavalieri n'avait sans doute posé la question que sur les courbes dont il est parlé plus haut.

(AD LALOVERAM PROPOSITIONES)⁽¹⁾.

I.

Sit (fig. 112) parabole BAD, cujus axis AC, applicata BC, rectum latus AE. Queritur ratio curvæ AB ad rectam BC.

Fig. 112.



Est hyperbole MLO, cujus centrum G, transversum latus FL aequale rectæ AE quæ est rectum datæ paraboles latus; axis hyperboles sit LN.

(¹) Ce morceau figure comme *Pars prior* de l'*Appendix secunda* (p. 391 à 395) dans l'Ouvrage : *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris, et in duobus adjectis Appendicibus*. — Autore ANTONIO LALOVERA Societatis Jesu. — Tolosæ, apud Arnaldum Colomerium, Regis et Academiæ Tolosane Typographum, M.DC.LX. Cum privilegio.

L'attribution à Fermat est justifiée par le préambule ci-après de l'*Appendix secunda* (p. 390-391) :

« Quod olim fecit Conon illi apud Archimedeum laudatissimus, cum aliquot recondita tunc Geometriæ theorematum à se primùm repertorum nudam propositionem ad Amicos privatim misit demonstratione penes se pressâ: fortasse quia (quod sæpe evenit) illam è mentis arcano in adversaria nondum transtulerat: hoc ipsum alter sæculi nostri Conon D. de Fermat cum sæpe alias, tum nuperrimè de argumento summè arduo præstitit. Postremas ego istas propositiones, quoniam mirificè illustrent ea quæ de quadraticis angularibus in quinto, et de spirabilibus lineis in sexto libro scripsi, huic operi attexere (quod singulari ejus modestiæ inopinatum profectò accidet) non dubito: fieri enim nequit quin iis inspectis, quilibet alius meis ausis faveat et de publicâ hæc ad Geometrica inventa acces-

rectum vero illius latus sit æquale lateri transverso, ut nempe rectangulum quodvis FNL sit æquale quadrato applicatæ MN. Ad punctum G excitetur perpendicularis GH æqualis rectæ BC in parabola; deinde, ductis rectis HM et LI, ipsis GN et GH parallelis, per punctum M, in quo recta HM occurrat hyperbolæ, ducatur applicata MN.

Aio quadrilaterum MHGL, cujus tria latera sunt rectæ MH, HG, GL, quantum vero latus curva hyperboles ML, esse ad rectangulum IG ut curva parabolica AB est ad rectam BC.

II.

Data sit (*fig. 113*) parabole BAD, cujus axis AC, applicata BC, rectum latus AE; circa applicatam BC volvatur spatium parabolicum BAC. Queritur dimensio superficiæ curvæ illius solidi.

Exponatur hyperbole MNH, cujus axis HI, transversum latus HF æquale quartæ parti lateris recti paraboles, sive rectæ AE; rectum vero illius hyperboles latus sit æquale transverso, ut nempe rectangulum

sione non summopere gaudeat. Ista si pro meis evulgare decrevissem, Vir quidem modestissimus, qui non sibi sed Geometriæ famam querit, æquissimo rem tulisset animo : id tamen alienissimum à me semper fuit : nec existimo Geometriæ gravius quicquam obijci posse, quam quod alieni exprobari aliquando audivi, *totus non es tuus, totus es alienus; et hac ipsa ratione quæ Geometra es,*

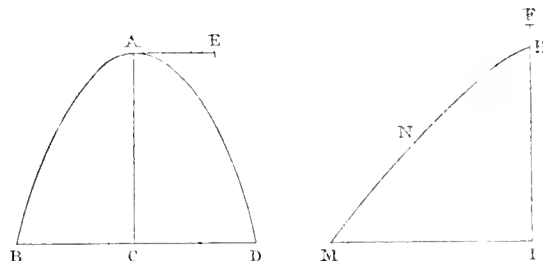
Calvus cùm fueris, eris comatus.

Hunc autem jamdiu esse morem Viro Clariss. ut sua per Amicorum manus Geometrica tacite spargat, luculenter testatur R. P. Mersemm. prop. 47. Hydr., pag. 193 : *taceo*, inquit, *varios illos πρὸ ἐπὶ πρῶτον, de maximis et minimis, de tangentibus, de locis planis, solidis et ad sphaeram, quos Clariss. Senator Tolosanus D. Fermatius huc ad nos misit.* Plura alia ejus inventa commemorat in præfat. ad Mechanica n. 4, in Ballisticis pag. 57, in Analysis pag. 385. Hinc factum est ut in ore summorum etiam in Italia Geometrarum Torricelli et Cavalieri semper fuerit, quod testatur doctissimus Bullialdus in præfatione opusculi *de Porismatibus* (*). Caterum non res tantum, sed verba etiam ipsa sunt integerrimi Senatoris : quibus omnibus de meo adjicio in posteriore parte innumeras curvilinearum figurarum, in quibus est Nicomedeæ conchoides, quadraturas : quæ omnia si vera esse comprobantur, ex totâ istâ appendice confirmabitur illud, quod quidam dixit : *hæc tempestate in Geometricis inventum et superatum feliciter esse Bonæ Spei promontorium illud, unde expedita existat navigatio ad inaccessas antè tetragonismorum præsertim regiones.* »

* Voir plus haut (p. 18) la note 2 de la page 18.

quodvis FHI sit æquale quadrato applicatæ IM. Fiat recta HI æqualis rectæ AC axi paraboles, et ducatur applicata IM. A rectangulo sub CA

Fig. 113.



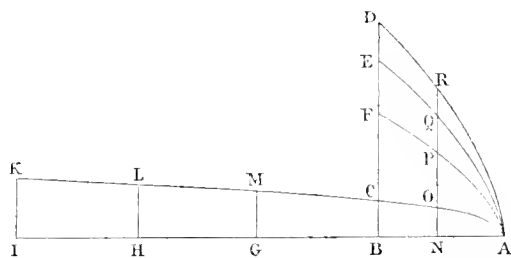
in curvam parabolicam BA auferatur spatium hyperbolicum IMH; reliquum quadretur.

Diagona illius quadrati erit radius circuli < æqualis > superficiei curvæ solidi quod fit a rotatione spatii ABC circa applicatam BC.

III.

Sit semiparabole quævis AC (fig. 114), cujus vertex A, axis AB; ab ea curva formentur aliæ curvæ infinitæ, ut AF, AE, AD, etc.

Fig. 114.



Ita autem formantur : in curva AF, applicata BF est æqualis curvæ parabolicæ CA et, sumpto similiter quovis puncto X, a quo ducatur applicata NP, applicata NP est etiam æqualis curvæ parabolicæ AO. In curva EA, applicata EB æquatur curvæ secundi gradûs FA, et illius applicata QN æquatur portioni < ejusdem curvæ > secundi gradûs PA. Item in curva AD, applicata BD æquatur curvæ tertii gradûs EA, appli-

cata vero NR portioni ejusdem curvæ tertii gradûs QA : et sic in infinitum.

Aio omnes hujusmodi in infinitum curvas rationem habere datam ad parabolas primarias, hoc est simplices; enuntiari quippe potest generale theorema hoc pacto :

Continuetur parabole primaria AC in infinitum per puncta, verbi gratia, M, L, K, et illius axis similiter ad puncta quotlibet G, H, I producatur; fiant rectæ BG, GH, HI singule æquales axi AB, et ducantur applicatæ GM, HL, IK.

Curva parabolica AM est ad curvam secundi gradûs AF ut applicata GM ad applicatam BC.

Curva parabolica AL est ad curvam tertii gradûs AE ut recta HL ad BC rectam.

Curva parabolica AK est ad curvam quarti gradûs AD ut applicata KI ad rectam BC.

Et sic in infinitum.

Si vero intelligantur AMG, AFB circa applicatas GM, BF rotari, superficies curva ex rotatione spatii AMG circa rectam GM erit ad superficiem ex rotatione spatii AFB circa rectam BF ut cubus rectæ GM ad cubum rectæ BC.

Similiter superficies curva ex rotatione spatii ALH circa HL erit ad superficiem curvam ex rotatione spatii AEB circa rectam BE ut cubus rectæ HL ad cubum rectæ BC.

Et sic in infinitum.

IV.

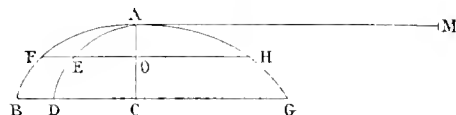
Esto figura semicycloides BA (*fig.* 115, 116), a qua formetur alia curva DA cā conditione ut applicatæ BC, CD; FO, EO sint inter se semper in eadem ratione data. Demonstrarunt Geometræ ⁽¹⁾ semicy-

⁽¹⁾ Fermat et Roberval sur l'énoncé de Wren (*Histoire de la Roulette* dans les *Œuvres de Pascal*, t. V, p. 172-173). La démonstration de Fermat est perdue; Lalouvière (p. 183) en dit : « Hujus rei demonstrationem more antiquorum à Geometra celeberrimi nominis Folosano subtilissime elaboratam legi. »

cloidem BA esse duplam rectæ AC, quæ est diameter circuli cycloidem producentis. Queritur ratio curvarum AD ad alias lineas aut curvas aut rectas.

Ita autem generaliter definimus : Si hæ novæ curvæ sint intra cycloidem et diametrum circuli generantis, ut contingit in figura quarta (*fig. 115*), omnes hæ curvæ AD earumque portiones erunt æquales

Fig. 115.



curvis parabolicis; quod si novæ curvæ sint exteriores cycloidi, ut in figura quinta (*fig. 116*), omnes hæ curvæ AD earumque portiones datam habebunt rationem ad summam rectarum et circumferentiarum circularium.

Enuntiari potest in figura quarta (*fig. 115*) generalis propositio hoc pacto : Fiat

ut differentia quadratorum BC et CD ad quadratum CD,

ita quadrupla rectæ AC ad rectam AM,

et per punctum A tanquam verticem describatur parabole cujus rectum latus sit AM et axis AC; occurrat autem parabole rectæ BDC productæ in puncto G, rectæ vero FEO in puncto H. Ratio curvæ AG parabolicæ ad curvam AD erit data, eadem nempe potestate quæ est quadrati BC ad differentiam quadratorum BC, CD.

Eadem vero erit ratio portionum AH et AE.

Ratio vero superficierum curvarum quæ oriuntur ex rotatione spatii ACG circa applicatam CG et ex rotatione spatii ADC circa rectam DC eadem est quæ curvarum AG et AD. Similiter in portionibus AOH, AEO circa rectas OH et OE rotatis.

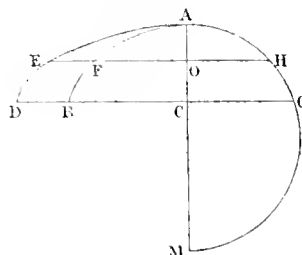
In figura autem quinta (*fig. 116*), in qua curva AD est exterior cycloidi AB, fiat

ut differentia quadratorum CB, CD ad quadratum CD,

ita recta AC ad AM

rectæ AC in directum positam; super rectâ AM describatur semicirculus, quem rectæ DBC, EFO secant in punctis G et H. Ratio curvæ

Fig. 116.



AD < ad > summam curvæ circularis AG et rectæ GC dabitur : erit nempe

ut quadratum BC ad differentiam quadratorum DC, CB,

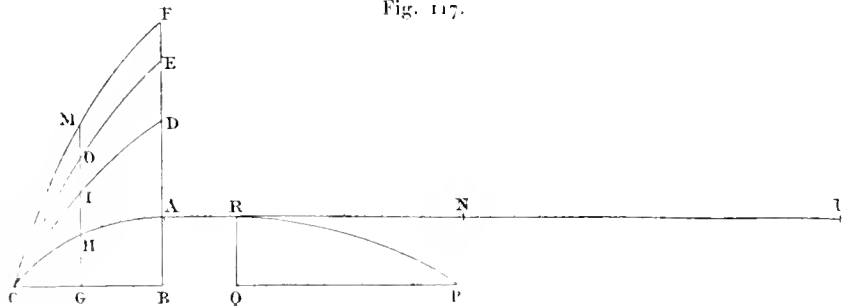
ita potestate summa lineæ circularis AG et rectæ GC ad curvam AD,

et similiter summa lineæ circularis AH et rectæ HO in eadem erit ratione ad curvam AE.

V.

Sit in figura sexta (*fig. 117*) parabole AC, cujus vertex A, axis AB.

Fig. 117.



applicata CB; a curva parabolica CA deriventur aliae in infinitum curvæ CD, CE, CF, simili qua in figura tertia (*fig. 114*) usi sumus methodo, nisi quod in hac terminum applicatæ servamus, in illa vero terminum axis eundem semper retinemus.

Ducatur nempe GHOM (*fig. 117*) axi AB parallela : ea erit natura

curvarum hujus speciei, ut recta BD, quæ secat in D curvam CID secundi gradûs, sit æqualis curvæ parabolicæ AC, recta item GI sit æqualis CH portioni parabolicæ; recta autem BE quæ secat < in E > curvam tertii gradûs COE, sit æqualis curvæ DIC secundi gradûs; et sic de cæteris in infinitum, eamque portionibus.

Aio omnes hujusmodi curvas, CD, EG, FC in infinitum, æquales esse curvis parabolicis primariis seu simplicibus, diversis tamen a parabolis quæ æquantur curvis juxta methodum tertiæ figuræ generatis. En itaque theorema generale :

Exponatur parabole RP, cujus axis RQ æqualis axi AB prioris paraboles, rectum vero latus RU sit duplum recti lateris AN : Aio parabolæ RP ita descriptam æqualem esse curvæ CID.

Si vero, manente axe RQ æquali AB, rectum latus RU fiat triplum recti lateris AN, tunc curva parabolica RP erit æqualis curvæ COE.

Si vero, manente semper axe RQ æquali axi AB, rectum latus RU fiat quadruplum recti lateris AN, tunc curva parabolica RP erit æqualis curvæ CMF.

VI.

Si autem circa rectas AB, BD, BE, BF rotentur spatia ACB, DCB, ECB, FCB in infinitum, dantur circuli æquales omnibus et singulis superficiibus curvis solidorum inde oriundorum, eâdem omnino facilitate qua in conoide parabolico, ex parabola AC circa axem AB descripto, circulum curvæ ipsius superficiæ æqualem representamus. Ejus vero constructionem non adjungeremus, quum jam ab aliis ⁽¹⁾ inventam audierimus (licet eorum scripta hac de re ad nos non pervenerint), nisi quod nostra hæc constructio ad methodum generalem in omnibus conoidibus circa axes BD, BE, BF novarum istarum curvarum in infinitum producendis facillime producit.

⁽¹⁾ Roberval (d'après Merseune, *Cogitata physico-mathematica*, 1644, p. 99); Huygens, dans une Lettre à Carcavi du 16 janvier 1659 (comparer *Œuvres de Pascal*, édition de 1779, t. V, p. 403 et 455; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Huggucus de Zulichem, en luy envoyant la dimension des Lignes de toutes sortes de Roulettes, lesquelles il montre estre égales à des Lignes Éliptiques*. A Paris, M.DC.LIX).

In figura sexta (*fig.* 117) circa rectam BD rotetur curva CD, superficies curva inde oriunda hoc pacto invenitur :

Fiat, ex superiore methodo, curva parabolica RP æqualis curvæ CID; circa rectam RQ rotetur parabole RP. Superficies conoidis parabolici RPQ ad superficiem conoidis DICB erit ut applicata PQ ad applicatam CB.

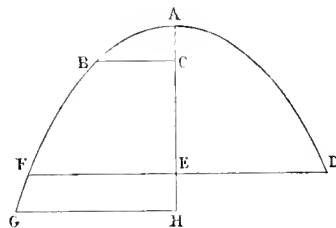
Si PR parabole juxta præcedentem methodum fiat æqualis curvæ COE, conoides parabolicum RPQ dabit superficiem curvam quæ ad superficiem curvam conoidis EOCB erit ut applicata PQ ad applicatam CB.

Et sic in infinitum.

VII.

Sit in figura septima (*fig.* 118) parabole FBAD, cujus axis EA, applicata FE. Quaritur dimensio superficiei curvæ solidi quod fit a spatio ABFE circa axem AE rotato.

Fig. 118.



Fiat AC æqualis quartæ parti recti lateris et applicetur CB; fiat EH æqualis AC et applicetur GH; quadretur CBGH (hoc autem est facile ex Archimede).

Diagona quadrati spatio CBGH æqualis est radius circuli æqualis superficiei curvæ conoidis FAD circa axem AE.

VIII.

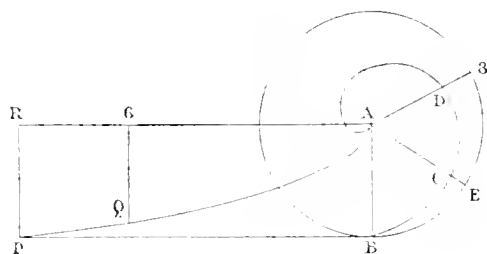
Videat subtilis ille Geometra ⁽¹⁾, qui nuper æqualitatem helicis et paraboles demonstravit, an potuerit universalius concipi theorema et

⁽¹⁾ *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S., en lui envoyant la démonstration à la manière des anciens de l'égalité des lignes Spirale et Parabolique.* A Paris, M.DC.LVIII.
— *Œuvres de Pascal*, t. V, pages 426 à 432.

helices infinite cum infinitis parabolis eleganter comparari, sequentis propositionis beneficio generaliter, si libuerit, enuntiandae et exemplificandae.

Proponatur (*fig. 119*) helix cujuscumque in infinitum speciei in figura 38 libelli Dettonvillani (¹), in qua potestas quaevis radii AB ad

Fig. 119.



potestatem similem rectae AC sit in ratione potestatis cujuslibet circumferentiae totius BEB ad potestatem similem portionis periphericae EB.

Exponatur separatim parabole cujus semibasis sive ultima applicatarum RP aequetur radio AB, axis vero AR portioni circumferentiae totius BEBB, cujus numerator aequetur exponenti potestatis diametri AB, denominator verò aequetur aggregato exponentium potestatum diametri AB et circumferentiae BEBB; denique potestates applicatarum in parabola, quarum exponens aequatur aggregato exponentium potestatum diametri AB et circumferentiae BEBB, sint inter se ut potestates portionum axis, quarum exponens est aequalis exponenti circumferentiae BEBB.

Aio helicem ita effictam parabolæ ita constructæ fore semper et in quocumque casu æqualem.

Exempli gratia, proponatur primum helix Archimedeae et parabole

(1) La figure que nous reproduisons d'après Lalouvière ne présente pas toutes les complications de celle de Pascal. Fermat cite d'ailleurs le Volume : *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses Inventiones de Geometrie*, — à Paris, chez Guillaume Desprez, rue Saint-Jacques, à l'Image Saint-Prosper, M.DC.LIX, — Volume qui réunit, sous neuf paginations successives, mais avec des planches de figures formant une seule série, les différents écrits publiés sous le nom de Dettonville.

simplex et sit

ut radius AB ad rectam AC,

ita circumferentia tota BE8B ad ejusdem portionem E8B.

Construatur separatim parabole AQP, cujus ultima applicatarum sive basis RP sit æqualis radio AB; axis autem AR sit æqualis portioni circumferentiæ BE8B, cujus numerator sit æqualis exponenti potestatis diametri AB, qui in hoc casu est 1; denominator verò æquetur summae exponentium potestatum diametri et circumferentiæ, hoc est binario : nam exponens potestatis periphericæ in hoc casu est etiam 1. Sit itaque AR axis æqualis dimidio circumferentiæ helicis constitutivæ; sit autem in parabola ut potestas applicatæ RP, cujus exponens æquatur summae exponentium diametri et circumferentiæ, hoc est, in hoc casu, numero 2, ad potestatem similem applicatæ 6Q, ita potestas rectæ AR, cujus exponens æquatur exponenti circumferentiæ BE8B, sive 1 in hoc casu, ad similem potestatem rectæ A6, hoc est :

ut quadratum rectæ RP ad quadratum rectæ 6Q,

ita recta RA ad rectam 6A.

Curva parabolica PQA erit æqualis helicis BCDA.

Esto jam

ut quadratum AB ad quadratum AC,

ita tota circumferentia BE8B ad portionem E8B :

exponens potestatis diametri AB in hoc casu est 2, circumferentiæ vero, 1. Parabole ita constructur juxta prædictum canonem :

Applicata RP æquabitur radio AB, axis AR æquabitur hessi vel duobus trientibus circumferentiæ BE8B et erit

ut cubus RP ad cubum 6Q, ita recta RA ad rectam 6A.

Hujusmodi vero parabole helicis correlatæ æqualis erit.

Esto deinde

ut recta AB ad rectam AC,

ita cubus circumferentiæ BE8B ad cubum portionis E8B.

In parabola, applicata RP æquabitur radio AB, axis vero AR æquabitur

quadranti circumferentiæ BE8B, et erit

ut quadratoquadratum RP ad quadratoquadratum 6Q,
ita cubus RA ad cubum 6A.

Hæc autem parabole huic helici erit æqualis.

Denique sit in helice

ut quadratum radii AB ad quadratum rectæ AC,
ita cubus circumferentiæ BESB ad cubum portionis ESB.

In parabola huic helici correlata et æquali, applicata RP erit æqualis, ut semper, radio AB, recta vero RA erit æqualis duabus quintis partibus circumferentiæ BE8B, et erit in parabola

ut quadratoecubus applicatæ RP ad quadratoecubum applicatæ 6Q,
ita rectæ AR cubus ad cubum rectæ 6A.

Nec dissimilis in helicibus et parabolis cujuslibet speciei invicem comparandis in infinitum erit methodus. Helicis autem, sive diminutæ sive auctæ, portiones cum portionibus paraboles correlatæ nullo negotio comparabuntur. Unde sequitur dari intra circulum infinitas numero helices specie et quantitate diversas; imo dantur infinitæ ipsâ circumferentiâ majores : quod inter miracula geometrica potest numerari. Nulla tamen datur quæ non sit minor aggregato circumferentiæ et radii, et nulla etiam quæ non sit radio major ⁽¹⁾.

(1) Après ce fragment, le texte de Lalouvière continue par un *Scholium* commençant par ces mots : « *Hactenus Viri Clarissimi propositiones non minus arduæ quam novæ* » et finissant par ceux-ci : « *nisi nefas putarem quicquam hocce in loco demere vel addere tam præclaris Viri doctissimi inventis* ».

On lit encore dans le même Ouvrage (Livre II) :

Page 21 : « *Cyclocylindricam figuram primâ nominis* vocamus eam quæ intelligitur in superficie cylindri recti describi eo modo quo circulus in plano, nempe si, pede circini extremo manente in dato superficie cylindricæ puncto, ipse circinus circumducatur notans in superficie cylindricâ lineam donec ad idem punctum circuitu peracto redeat, quoties iste reditus fuerit possibilis. Circini autem crura si deducta fuerint intervallo diametri baseos cylindri, vocetur *cyclocylindrica primaria* et antonomasticè *cyclocylindrica*; si alio quovis intervallo, dicatur *cyclocylindrica secundaria*. Quod si figatur extra illam superficiem, *nominis secundi* appellabitur. . . . »

Page 29 : « De hac figurâ quadrandâ ut cogitarem fecit Clarissimus D. de Fermat; postea

enim quam primum hujus operis librum vulgavi (^a), nescio qua se dante occasione significavit mihi invenisse se solidi, motu cujuslibet cycloeylindricæ primi nominis circa basim geniti, proportionem eum cylindro circa eandem basim genito motu rectanguli cujus unum latus sit eadem basis, alterum aquet axem cycloeylindricæ. Ubi primum solus lui, cepi mecum cogitare quid istud rei foret, reperique tandem post aliquot dies non tantum proportionem illam, quam mihi vir optimus non expresserat, sed etiam quadraturam cycloeylindricæ primariæ primi nominis. Hoc, cum iterum illum alloquerer, ipsi denuntiavi, deque meo invento pro sua qua me licet immerentem complectitur benevolentia, et pro studio illo quo artium omnium incrementa mirifice fovet, mihi amplè gratulatus est. Aliquot post diebus literis ad D. Carcavi datis inserui quantum hac in re deberem integerrimo illi Senatori, quanti facerem subtilissimam quam mihi tunc communicarat demonstrationem circa proportionem cylindri et solidi. . . »

Et toujours sur le même sujet, page 34 : « Doctissimus D. de Fermat, methodo subtilitatis prorsus mirabilis, istam proportionem in quacunque primi nominis cycloeylindricâ mihi demonstravit : quam quidem methodum suis in operibus, quæ totâ Europâ enixè expetuntur, edet, uti spes est, Amicorum omnium precibus tandem victus. »

^a C'est-à-dire après le 23 juillet 1658, mais avant le 4 septembre 1658, date de la réponse faite par Pascal à la lettre Talouère à Carcavi. Il faut entendre au reste, pour la question imaginée par Fermat, que la surface du cylindre est développée sur un plan.



DE LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS COMPARATIONE DISSERTATIO GEOMETRICA ⁽¹⁾.

Nondum, quod sciam ⁽²⁾, lineam curvam pure geometricam recta³ geometra⁴ adaequarunt. Quod enim a subtili illo mathematico Anglo nuper inventum et demonstratum est : *cycloidem nempe primariam diametri circuli ipsam generantis esse quadruplam*, hoc suam, ex sententia doctissimorum geometrarum ⁽³⁾, videtur habere limitatio-

⁽¹⁾ Cette Dissertation, comme l'Appendice qui suit, a été imprimée du vivant de Fermat, sous le même titre, suivi des indications « Autore M.P.E.A.S. — Tolosae, apud Arnaldum Colomerium, Regis et Academiae Tolosanae Typographum, MDCLX. » et avec une pagination spéciale, à la suite du Traité de Lalouvière sur la cycloïde (*voir* plus haut, p. 199, note 1). La réimpression des *Varia* ne diffère que par la correction des fautes indiquées par les errata de l'édition anonyme et par la substitution de majuscules aux minuscules pour les lettres des figures.

⁽²⁾ On ne peut mettre en doute l'assertion de Fermat : au moment de l'impression de cet Écrit, il connaît donc la rectification de la cycloïde par Wren, rendue publique en 1658 à l'occasion des problèmes proposés sur cette courbe par Pascal ; au contraire, il ignore, non seulement, bien entendu, la découverte de William Neil (reportée à l'année 1657, mais publiée en 1673 seulement par Wallis, *Philosophical Transactions*, p. 6146-6149), mais encore, ce qui peut surprendre réellement, la Lettre de Henri Van Heuraet insérée pages 517-520 de l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes par Schooten (Amsterdam, Elzévi⁵rs, 1659). Il n'est guère douteux que Fermat n'ait eu bientôt après connaissance de cette Lettre et qu'il ne soit alors applaudi d'avoir caché son nom en publiant un travail pour lequel il avait incontestablement été devancé. Il ne s'agit pas d'ailleurs ici d'une ancienne découverte que Fermat aurait tenue secrète plus ou moins longtemps ; sa Dissertation est de fait une réplique au petit Traité de Pascal (Dettonville), de l'*Égalité des lignes spirale et parabolique*, du 10 décembre 1658. Cependant Fermat n'en semble pas moins être le premier qui ait considéré la courbe $y^3 = ax^2$, en généralisant la notion de parabole. *Voir* plus haut, page 195.

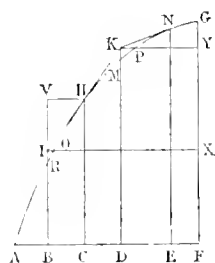
⁽³⁾ Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hingguens de Zulichen ; Paris, 1659 — *Œuvres de Pascal* (éd. de 1779), tome V, page 413 : « A quoi M. de Sluze ajouta cette belle re-

nem : il quippe hanc esse legem et ordinem naturæ pronuntiant ut non sinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin prius supposita fuerit alia recta alteri curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipsis allato ita se habereprehendunt, nec nos diffitemur, quum constet descriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum recta, hoc est, circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum recta quæ est basis ipsius cycloidis. Sed quam vera sit hæc, quam statuunt, lex naturæ, et quam periculosum ab uno aut altero experimento statim ad axioma properare, infra patebit : nos enim *curvam vere geometricam, et ad ejus constructionem nulla talis alterius curvæ cum recta æqualitas processisse supponatur, rectæ datæ æqualem esse demonstrabimus et paucis, quantum fieri potuerit, totum negotium absolvemus.*

PROPOSITIO I.

Sit, in figura prima (fig. 120), curva quævis AHMG in easdem partes cava, exempli causa, una ex parabolis infinitis in qua tangentes extra

Fig. 120 (1).



curvam cum base AF et axe FG concurrant, et sumatur in hujusmodi curvâ quodvis punctum H per quod ducatur tangens HK, in qua sumptis ex utraque parte punctis K et I, demittantur perpendiculares IB, KD in basim AF, quæ secant curvam in punctis R et M : Aïo portionem tangentis HI portione curvæ RH esse minorem, portione autem ejusdem tangentis HK portione curvæ HM esse majorem.

marque dans sa réponse du mois de septembre dernier, qu'on devoit encore admirer sur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe. »

Quum enim, ex hypothesi, tangens KI occurrat basi AF extra curvam, ergo angulus CHI , qui fit ab intersectione perpendicularis in basim HC et tangentis HI , erit minor recto, ideoque a puncto H demissa perpendicularis in rectam BI cadet in punctum V supra puncta B , R , I . Patet itaque rectam HV minorem esse rectâ HI ; item rectam HI minorem esse rectâ quæ puncta H et R conjungit : ergo, a fortiori, recta HI minor erit portione curvæ HR , quam recta ab H ad R ducta subtendit. Quod primo loco fuit demonstrandum.

Aio jam portionem KH portione curvæ HM esse majorem.

A puncto K ducatur ad eandem curvam tangens KN , et demittatur perpendicularis NE . Ex prædemonstratis, probatum est rectam KN esse minorem portione curvæ NM ; sed, ex Archimede (¹), summa tangentium HK , KN est major totâ portione curvæ HN : ergo portio tangentis HK portione curvæ HM major erit. Quod secundo loco fuit ostendendum.

Nec moveat tangentem a puncto K ultra punctum G aliquando occurrere curvæ : hoc enim casu aliud punctum inter K et M sumi poterit, et omnia ad præcedentem demonstrationem aptari.

INDE SEQUITUR, si a punctis K et I ducantur perpendiculares ad axem, curvam in punctis O et P secantes, hoc casu tangentem HI curvâ HO esse majorem, tangentem vero HK curvâ HP esse minorem.

Si enim imaginemur inverti figuram ita ut axis in locum baseos, basis in locum axis transferatur, non solum similis in hoc casu, sed eadem omnino erit demonstratio.

PATET ATTEM, ex ipsa constructione, si rectæ BC et CD sint æquales, portiones tangentis HI et HK esse item inter se æquales, quod tamen summopere notandum.

PROPOSITIO II.

Ad dimensionem linearum curvarum non utimur inscriptis et cir-

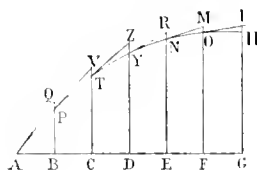
(¹) ARCHIMÈDE, *De sphaera et cylindro*, I, λαμβανόμενον 2 : édition Heiberg, volume I, pages 8-10.

cumscripitis more Archimedeo ⁽¹⁾, sed circumscriptis tantum ex portionibus tangentium compositis : duas enim series tangentium exhibemus, quarum una major est curvâ, altera minor. Demonstrationes autem multo faciliorem et elegantiorē per circumscriptas solas evadere analystæ experientur.

Possibile igitur, ut vult methodus Archimedeæ, pronuntiamus cuilibet ex curvis jam prædictis circumscribere duas figuras ex rectis constantes, quarum una superet curvam intervallo quovis dato minore, altera autem superetur a curva intervallo etiam dato minore.

Exponatur curva aliqua ex prædictis in secunda figura (*fig. 121*). Secetur basis AG in quotlibet portiones æquales AB, BC, CD, DE, EF,

Fig. 121 (2).



FG, et a punctis B, C, D, E, F erigantur perpendiculares BQ, CV, DZ, ER, FM, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O; ducantur item tangentæ AQ, PV, TZ, YR, NM, OL.

Ex prima propositione patet tangentem AQ portione curvæ AP esse majorem; item tangentem PV portione curvæ PT esse majorem, et sic de reliquis, tandemque etiam ultimam OL portione curvæ OH esse majorem. Ergo figura, constans ex omnibus istis tangentium AQ, PV, TZ, YR, NM, OL portionibus, curvâ ipsâ major erit.

At exponatur eadem curva in tertia figura (*fig. 122*), ejus basis AG in eundem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F; a punctis B, C, D, E, F, ut supra, erigantur perpendiculares BR, CQ, DO, EL, FI, quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K; a puncto autem S (in hac tertia figura) ducatur tangens ST, occurrens

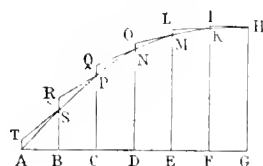
⁽¹⁾ ARCHIMEDE. *Circuli dimensio*, prop. 1; mais la méthode d'Archimède est surtout développée dans le *Traité De sphaera et cylindro*, où elle est appliquée à la mesure des surfaces du cône, du cylindre et de la sphère.

perpendiculari AT; deinde a punctis P, N, M, K, H ducantur tangentes PR, NQ, MO, KL, HI, occurrentes perpendicularibus BS, CP, DN, EM, FK in punctis R, Q, O, L, I.

Ex prima propositione patet tangentem ST portione curvæ AS esse minorem; item tangentem PR portione curvæ PS esse minorem, et sic deinceps, tandemque ultimam HI (quæ parallela est basi) portione curvæ KH esse minorem. Ergo figura, constans ex omnibus istis tangentium ST, PR, NQ, MO, KL, HI portionibus, curvâ ipsâ minor erit.

Quum autem, ex corollario propositionis primæ, partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrimque productarum et portionibus baseos hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales, patet (quum

Fig. 100 (3).



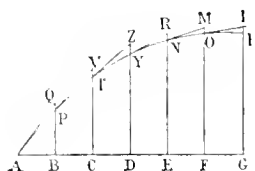
secundæ et tertiæ figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripserimus) tangentem ST *tertiæ figuræ* æqualem esse tangenti PV *secundæ figuræ*. Quum enim punctum S in tertia figura idem omnino sit cum puncto P secundæ figuræ et portiones baseos AB, BC in utraque figura sint inter se æquales, portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum, nempe recta ST in tertia figura et recta PV in secunda, inter se æquales erunt.

Probabitur similiter tangentem PR tertiæ figuræ æqualem esse tangenti TZ secundæ, et sic de cæteris; quo peracto, constabit primam tantum secundæ figuræ et ultimam tertiæ nulli ex portionibus figuræ contrariæ æqualem esse: excessus igitur, quo figura secunda superat tertiam, est idem quo tangens AQ secundæ figuræ superat tangentem HI tertiæ figuræ. Sed recta HI, propter parallelas, æquatur portioni baseos FG sive AB (supponuntur enim omnes baseos portiones æquales in utraque figura): ergo figura secunda, ex tangentibus curvâ majori-

bus composita, superat figuram tertiam, ex tangentibus curvâ minoribus compositam, eo ipso quo in secunda figura tangens AQ superat portionem baseos AB, ipsius oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curvâ, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio. Quum enim, ex *Methodo tangentium* jam cognita, detur tangens ad punctum A (*fig. 121*).

Fig. 121 (2).



dabitur angulus QAB: sed angulus QBA est rectus: ergo datur triangulum QAB specie, datur itaque ratio rectæ AQ ad AB. Cavendum itaque est ut divisio baseos ita institutur ut differentia rectarum AQ et AB sit minor quâcumque rectâ datâ: quod ita assequemur, si queramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant rectâ datâ quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, et curandum deinde ut portio qualibet baseos, AB, non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Quum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvâ, quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, a fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, et minor ex circumscriptis superabitur a curva intervallo adhuc minore.

Pauit itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam, quum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse et demonstrasse sufficiet.

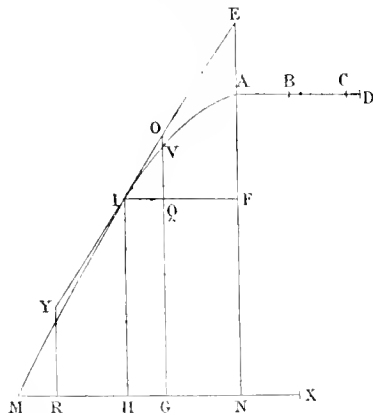
His positis, secure pronuntio inveniri posse curvam vere geometricam datæ rectæ æqualem: ea vero est una ex infinitis parabolis, quas olim spe-

culati sumus ⁽¹⁾, illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis. De quo ne dubitent geometræ, ita breviter demonstro.

PROPOSITION III (²).

Sit in quarta figura (fig. 123) parabole, quam jam indicavimus. MVA, cujus vertex A, axis AN, et in qua, sumpto quovis puncto I et ductis

Fig. 10: 10).



perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis MN, IF, cubus recte MN sit ad cubum recte IF ut quadratum recte NA ad quadratum recte FA, idque semper contingat; probandum est curvam MIA recte datam aequalem esse.

Fial

ut quadratum axis AN ad quadratum applicatæ NM ,
ita recta NM ad rectam AD ipsi AN perpendicularem.

Patet rectam AD esse rectum dictæ parabole latus, hoc est :

solidum sub AD in quadratum rectæ AN æquari cubo applicatæ NM,

item, sumpto quovis alio puncto, ut l ,

solidum sub AD in quadratum AF æquari cubo applicata IF;

quod non eget demonstratione : in facilibus enim non immoramur.

(¹) Voir plus haut, page 195.

(2) L'énoncé qui suit est en réalité celui de la proposition IV; l'objet de la proposition III se borne à un lemme déterminant la longueur de la tangente dans la parabole $y^2 = ax^2$.

INDE SEQUITUR, SI rectæ MN ponatur in directum recta NX rectæ AB æqualis, esse semper

ut quadratum tangentis IO ad quadratum rectæ HG,

vel ut quadratum tangentis IY ex altera parte ad quadratum rectæ oppositæ RH (utrobique enim, propter parallelas, eadem est ratio),

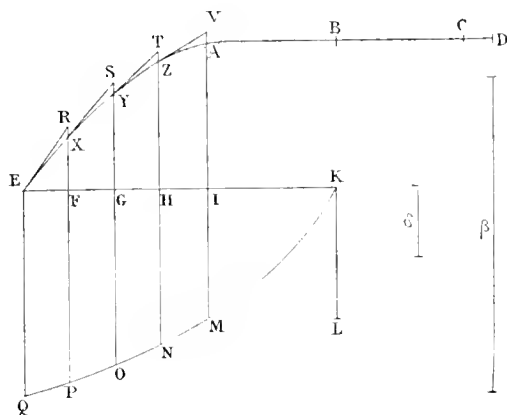
ita rectam HN ad rectam NX.

Recta enim HN æqualis est summæ rectarum HF et AB, et recta NX est æqualis AB. Hoc autem patet ex constructione : recta enim HN, propter parallelas, æqualis est rectæ HF, et reliqua NX facta est æqualis rectæ AB.

PROPOSITIO IV.

Exponatur in quinta figura (Fig. 124) nostra hæc parabole ANE, ejus sit ea, ut diximus, natura ut cubi applicatarum sint inter se in ratione quadratorum portionum axis. Sit ejus axis AI, basis aut semi-basis EI.

Fig. 124 (5).



Ex datis axe AI et applicatâ IE invenitur, ut superius diximus, rectum latus AD, a quo abscissâ nonâ ipsius parte CD, et reliquâ AC bifariam divisâ in B, secetur basis EI in quotlibet libuerit portiones æquales EF, FG, GH, HI, et a punctis F, G, H excitentur perpendiculares FX, GY, HZ, curvæ occurrentes in punctis X, Y, Z. Ad puncta autem E, X,

Y, Z ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV, occurrentes perpendicularibus FX, GY, HZ, IA productis, in punctis R, S, T, V. Ponatur rectæ EI in directum recta IK aequalis rectæ AB.

Patet, ex precedente propositione et ipsius corollario,

quadratum tangentis ZV ad quadratum rectæ HI
esse ut rectam HI ad rectam KI;

similiter

ut quadratum tangentis YT ad quadratum rectæ GH,
ita rectam GK ad rectam KI;

item

quadratum tangentis XS ad quadratum rectæ FG
ut rectam FK ad rectam KI;

denique

ut quadratum tangentis ER ad quadratum rectæ EF,
ita rectam EK ad rectam KI.

His positis, a puncto K excitetur KL perpendicularis ad rectam EK, et fiat recta KL aequalis rectæ KI sive AB; intelligatur jam per punctum K, tanquam verticem, axem autem KE, describi parabole simplex sive Archimedeæ, cujus rectum latus sit KL, et sit illa parabole KMQ, ad quam excitentur perpendiculares EQ, FP, GO, HN, IM, quæ erunt, ut patet, applicatæ paraboles et in directum positæ perpendicularibus FX, GY, etc.

Quadratum tangentis ZV, ut jam diximus, est ad quadratum rectæ HI,

ut recta HI ad rectam KI;

sed, ut recta HI ad rectam KI, ita, singulis in rectam KL ductis,

rectangulum sub HK in KL ad rectangulum sub IK in KL:

rectangulum vero sub HK in KL, ex natura paraboles Archimedeæ, æquatur quadrato applicatæ HN, et rectangulum sub IK in KL æquatur quadrato rectæ KL, quum rectæ IK, KL factæ fuerint æquales. Erit igitur

ut quadratum HN ad quadratum KL,
ita quadratum tangentis ZV ad quadratum rectæ HI.

ideoque

ut recta HN ad KL, ita tangens ZV ad rectam HL.

Similiter probabimus esse

ut tangentem YT ad rectam GH, ita applicatam GO ad KL:

item

ut tangentem XS ad rectam FG, ita applicatam FP ad KL:

denique

ut tangentem ER ad rectam EF, ita esse applicatam EQ ad KL.

Quum igitur sit

ut tangens ZV ad rectam HL, ita applicata HN ad KL,

rectangulum sub extremis aequabitur rectangulo sub mediis, ideoque

rectangulum sub NH in HL aequabitur
rectangulo sub KL in tangentem ZV.

Similiter

rectangulum sub OG in GH aequabitur
rectangulo sub KL in tangentem YT;

item

rectangulum sub PF in FG aequabitur
rectangulo sub KL in tangentem XS;

denique

rectangulum sub EQ in EF aequabitur
rectangulo sub KL in tangentem ER.

Quid autem pluribus in re proclivi et jam ad methodum Archimedeam sponte sua vergente immoramur? Per inscriptas enim et circumscriptas in segmento parabolico figuras, rectangula omnia QEF, PFG, OGH, NHI segmentum ipsum parabolicum EQMH designabunt. Omnes autem tangentes ER, XS, YT, ZV, per iteratam secundum nostrae praecepta methodi circumscriptionem, curvam ipsam EXYZA etiam designabunt: ergo segmentum parabolicum EQMH aequatur rectangulo sub KL in curvam EXA. Datur autem in rectilineis segmentum parabolicum

EQMI (quadravit enim parabolē Archimedes ⁽¹⁾, ideoque ipsius segmenta) : ergo rectangulum sub KL in curvam EXA etiam datur. Datur autem recta KL : ergo datur curva EXA et ipsi alia recta potest constitui æqualis. Quod erat demonstrandum.

Si quibusdam tamen hæc demonstratio brevitæ nimiâ laborare videatur, eam integram, insistendo vestigiis Archimedeis, non gravamur separatim adjungere, ut eam legant et examinent qui superiora non sufficere existimabunt.

Probandum est segmentum parabolicum EQMI rectangulo sub data KL in curvam EXA æquale esse.

Fiat, ex Archimede, segmentum illud parabolicum EQMI æquale rectangulo sub data recta KL in datam rectam β . Si probaverimus rectam β æqualem esse curvæ EXA, constabit propositum.

Aio itaque rectam β curvæ EXA esse æqualem : si enim æqualis non est, erit vel major vel minor.

Sit primo recta β major quam curva EXA, et sit earum excessus, si fieri potest, recta δ .

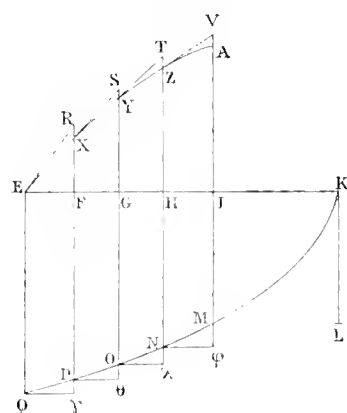
Ex propositione secundâ hujus, possumus curvæ EXA circumscribere figuram ex portionibus tangentium compositam, quæ superet curvam intervallo minore rectâ δ . Fiat igitur illa circumscriptio et in figura separata (*fig. 125*), quam etiam quintam romano characterē notavimus, circumscripta illa constet ex portionibus tangentium ER, XS, VT, ZV.

Circumscripta illa, ex prædemonstratis, est major curvâ EXA; sed et recta β posita est major eâdem curvâ : quum ergo circumscripta superet curvam minore intervallo quam recta β superet eandem curvam, ergo circumscripta minor est rectâ β . Rectangulum itaque sub recta KL in circumscriptam est minus rectangulo sub KL in rectam β ; at rectangulum sub KL in β factum est æquale segmento parabolico EQMI : ergo rectangulum sub KL in circumscriptam est minus dicto segmento parabolico EQMI.

(1) ARCHIMÈDE, *Quadratura parabolæ*, prop. 17; édition Heiberg, vol. II, page 334.

Probavimus autem rectangulum sub KL in portionem tangentis ER æquari rectangulo sub QE in EF; item rectangulum sub KL in XS æquari rectangulo sub PF in FG; item rectangulum sub KL in YT æquari rectangulo sub OG in GH; denique rectangulum sub KL in ZV

Fig. 15. V).



æquari rectangulo sub NH in HL : ergo rectangulum sub KL in totam circumscriptam est æquale summae rectangulorum sub QE in EF, sub PF in FG, sub OG in GH et sub NH in HL. Si autem in rectas FP, GO, HN, IM (quæ sensim decrescunt quo propius accedunt ad verticem paraboles) continuatas demittantur perpendiculares (seu parallelae basi) a punctis Q, P, O, X rectæ Qγ, Pθ, Oλ, Xφ, patet

rectangulum QEFγ	æquale esse	rectangulo sub QE in EF:
item rectangulum θF	æquari	rectangulo sub PF in FG,
rectangulum λG	æquari	rectangulo sub OG in GH,
denique rectangulum φH	æquari	rectangulo sub NH in HL.

Ergo rectangulum sub KL in circumscriptam est æquale rectangulis γE, θF, λG, φH.

Sed probavimus rectangulum sub KL in circumscriptam esse minus segmento parabolico EQML : ergo summa rectangulorum γE, θF, λG, φH erit minor dicto segmento parabolico EQML. Quod est absurdum : illa enim rectangula constituunt figuram ex rectangulis compositam

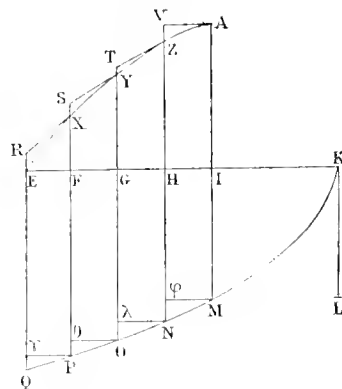
et segmento parabolico, ut patet, circumscriptam, ideoque ipso segmento majorem.

Recta itaque β non est major curvâ EXA; sed neque minorem esse probabimus.

Sit enim recta β minor curvâ EXA, si fieri potest, et curva superet rectam β intervallo δ .

Circumscribatur in figura separata (fig. 126), quam etiam quin-

Fig. 126 ($\sigma\chi\zeta\mu\alpha \in$).



tam caractere graeco notavimus, figura constans ex portionibus tangentium curvâ EXA minor, sed quam tamen ipsa curva superet intervallo minore ipso δ ; et sit illa figura constans ex portionibus tangentium NR, YS, ZT, AV.

Quum itaque curva sit major β intervallo δ , et eadem curva superet circumscriptam intervallo minore ipso δ , ergo circumscripta erit major recta β , ideoque rectangulum sub KL in circumscriptam erit majus segmento parabolico EQML.

Sed rectangulum sub KL in circumscriptam aequatur, ex praedemonstratis, rectangulis sub PF in FE, sub OG in GF, sub NH in HG et sub MI in IH: est enim

$$\text{ut NR ad FE, ita FP ad KL,}$$

ideoque

$$\text{rectangulum sub KL in NR aequatur rectangulo sub PF in FE,}$$

et sic de reliquis.

Quum igitur rectangulum sub KL in circumscriptam sit majus segmento parabolico EQMI, ergo summa rectangulorum, sub PF in FE, sub OG in GF, sub NH in HG et sub MI in HI, est major dicto segmento parabolico. Sed omnia illa rectangula, ductis perpendicularibus (seu basi parallelis) rectis $P\gamma$, $O\theta$, $N\lambda$, $M\zeta$, quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam (prout enim applicatæ magis distant a vertice, eo magis semper augentur), erunt æqualia rectangulis PE, OF, NG, MH; ergo summa omnium illorum rectangulorum, PE, OF, NG, MH, erit major segmento parabolico. Quod est absurdum: rectangula enim illa, PE, OF, NG, MH, componunt figuram ex rectangulis compositam et ipsi segmento parabolico inscriptam, ideoque ipso minorem.

Recta itaque β non est minor curvâ EXA; quum igitur nec sit major, nec minor, erit ipsi curvæ æqualis. Quod prolixius, ut omnis removeatur scrupulus, fuit demonstrandum.

EX IAM DEMONSTRATIS patet eadem facilitate demonstrari posse segmentum parabolicum quodvis EQPF, a priore abscissum, rectangulo sub data KL in curvam EX æquale esse; ideoque, si detur in basi quodvis punctum, ut F, quum ex Archimede segmentum parabolicum EQPF in rectilineis detur, dari etiam et rectangulum sub KL data in portionem curvæ EX; datur autem recta KL: ergo et curva EX. Dato itaque quovis puncto in base, ut F, dari portionem curvæ ipsi oppositam, et rectam posse assignari huic æqualem, manifestum est.

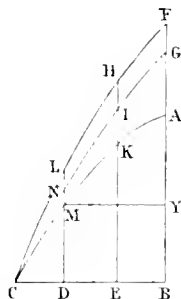
NEC MOVEAT, ad rectam illam curvæ EXA æqualem inveniendam, construendam videri parabolam simplicem, quo casu problema solidum evaderet. Quum enim supponatur ad veritatem tantum inquirendam et demonstrationem rite conficiendam paraboles illius descriptio, nihil vetat quominus calculus ipsum, dissimulatâ illâ imaginariâ paraboles descriptione, per rectas et circulos et expediamus et exhibeamus. Is autem calculus, nisi fallor, talis est:

Esto in figura sexta (*fig.* 127) curva parabolica DAC, ejus naturæ ut cubi applicatarum DB et NM sint inter se ut quadrata portionum axis BA et AM; dentur autem altitudo AB et semibasis BD, aut

parabolica inter admiranda Geometriæ colloetur, illud fortasse ab ipsis quæ mox sequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quam ex una hac curva derivari et formari alias numero infinitas, non solum ab ipsa, sed inter se, specie differentes, quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrantur? Propositio generalis hæc est :

Sit, in septima figura (fig. 128), curva nostra parabolica CMA, cujus altitudo AB, semibasis CB, et ab ea curva formentur alie in infinitum

Fig. 128 (7).



hac ratione ut, ductis perpendicularibus ad basim rectis DMNL, EKHI utcumque, secantibus curvam in punctis M, K, nova curva CNIG, ex hac formanda, sit ejus nature ut recta DN sit semper æqualis portioni prioris curvæ, nempe CM, ipsam respicienti; item recta EI sit æqualis portioni prioris curvæ CMK et sic in omnibus aliis quibuscumque perpendicularibus : hæc nova curva CNIG erit diversa a priore speciei⁽¹⁾.

Formetur pariter ab ipsâ tertia curva CLHF, in qua rectæ DL, EH sint semper æquales portionibus curvis CN et CNL secundæ curvæ; et a tertia pari ratione formetur quarta, a quarta quinta, a quinta sexta, et eo progrediantur in infinitum ordine.

Aio omnes istas curvas CNIG, CLHF et reliquas in infinitum, perinde ac primam parabolicam CMKA, rectis datis æquales esse.

Notandum autem istas omnes in infinitum curvas esse pure geome-

(1) Fermat n'a pas reconnu que, loin d'être différentes de la parabole primitive, toutes les courbes qui en sont ainsi dérivées successivement peuvent lui être superposées à la suite d'une simple translation.

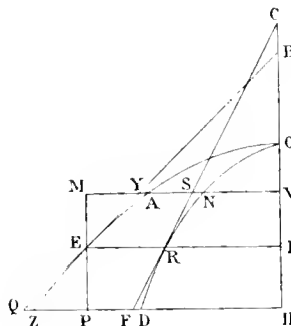
tricas, nec in illis itaque ad legem illam et ordinem naturæ de quibus initio hujus Dissertationis locuti sumus recurrendum. Licet enim rectæ DN et EI curvis CM et CMK supponantur æquales, eadem tamen ipsæ non tam suppositæ sunt quam ex prædictis demonstratæ esse pariter rectis æquales : dato quippe quolibet puncto D, quum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curvæ CM, ergo recta DN, quæ curvæ CM ex constructione ponitur æqualis, ut recta vere data, non ut æqualis curvæ, considerari debet; et sic de reliquis. Curva igitur supra descripta CNIG vere geometrica est; quam postquam æqualem esse rectæ datæ demonstraverimus, sequetur tertiam curvam ab ea formandam, nempe CLHF, esse quoque pure geometricam, et sic omnes alias in infinitum.

Demonstratio difficilis non erit, si prius præmiserimus generalem, quæ huic operi omnino inservit, propositionem :

PROPOSITIO VI.

Esto, in figura octava (fig. 129), quelibet curva, ejusdem cum præcedentibus naturæ, ONR, cujus vertex O, axis vel applicata OVI (eadem

Fig. 129 (8 .



enim semper est demonstratio); et ab ea formetur alia curva OAE, cujus ea sit proprietas ut applicatæ sint æquales portionibus abscissis a priore curva : exempli gratia, applicata VA sit æqualis curvæ ON, applicata IE sit æqualis curvæ OR, et sic de reliquis. Ad datum punctum, in nova hac curva, ducetur tangens hoc pacto : sit datum punctum E; ducatur appli-

cata EI, secans priorem curvam in R; ducatur recta RC tangens in dicto puncto R priorem curvam et occurrens axi in puncto C; fiat

ut RC ad CI, ita recta IE ad rectam IB,

et jungatur EB : Aio rectam EB tangere novam curvam EAO in puncto E.

Sumpto enim quovis puncto in axe, ut V, et ductâ applicatâ VNA, quæ secet priorem curvam in N, tangentem RC in S, secundam curvam in A, rectam vero EB in Y, si probaverimus rectam VY semper esse majorem applicatâ VA, recta EB non secabit novam curvam a parte verticis.

Hoc autem facillime probamus : Recta VA est aequalis curvæ ON sive differentie inter curvas OR, NR; at recta RS est minor curvâ RN, per consecarium primæ propositionis : ergo differentia inter curvam OR et rectam RS est major differentiâ inter eandem curvam OR et curvam RN. Sed recta VY est aequalis differentie inter curvam OR et rectam RS, *ut mox probabimus* : ergo recta VY, occurrens rectæ EB, erit major rectâ VA, occurrente curvæ OAE. Unde patet omnia puncta rectæ EB versus verticem esse extra curvam, ideoque recta EB curvam ab ea parte non secabit.

Imo nec inferius : Sumatur enim quodvis punctum, ut H, a quo ducatur applicata HZ, secans priorem curvam in D, tangentem RC productam in F, secundam curvam in Z, et rectam EB productam in Q. Si probemus rectam HQ, in quocumque casu, majorem esse rectâ HZ, patebit omnia puncta rectæ EB, etiam inferius sumpta, extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam EB tangere secundam curvam in dicto puncto E.

Recta HZ est aequalis, ex constructione, curvæ OD, hoc est summa curvarum OR, RD; quum autem recta RF sit portio tangentis RC inferius sumpta, erit, ex consecario primæ hujus, recta RF major curvâ RD, ideoque summa curvæ OR et rectæ RF erit major summâ ejusdem curvæ OR et curvæ RD. Summa autem curvæ OR et rectæ RF est aequalis, *ut mox probabimus*, rectæ HQ; summa vero curvarum OR, RD est aequalis rectæ HZ, ex constructione : ergo recta HQ semper

et in omni casu major erit applicatà HZ, ideoque recta EB in dicto puncto E tanget secundam curvam.

PROBANDUM autem reliquimus differentiam curvæ OR et rectæ RS æquari rectæ VY.

Ducatur recta EM parallela axi et occurrat rectæ VY productæ in M.
Ex constructione est

ut EI ad IB, ita RC ad CI;

sed

ut EI ad IB, ita VY ad VB, et ita YM ad ME;

ut autem RC ad CI, ita RS ad VI;

ergo

ut YM ad ME, ita RS ad VI.

Sunt autem rectæ ME, VI æquales, propter parallelas : ergo rectæ YM, RS erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ EI, VM : ergo differentia inter rectas EI et MY erit recta VY. Sed recta EI, ex constructione, æquatur curvæ OR : ergo differentia inter curvam OR et rectam MY (sive ipsi æqualem RS) æquabitur rectæ VY. Quod primo erat probandum.

Nec dissimili ratiocinio procedet demonstratio infra applicatam EI : Ductà enim rectà EP parallelà axi, probabimus rectam QP æqualem esse rectæ RF.

Est enim

ut EI ad IB, hoc est QH ad HB, hoc est QP ad PE,

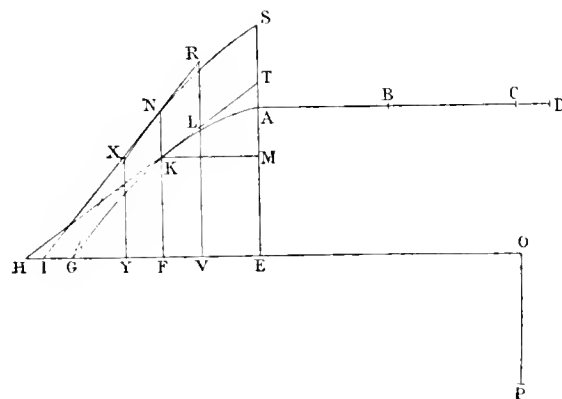
ita recta RC ad CI, hoc est RF ad HI;

sunt autem æquales PE, HI : ergo et rectæ QP, RF. Recta autem HQ æquatur rectis HP, PQ, quarum prior HP æquatur rectæ HE sive curvæ OR, posterior autem PQ æquatur, ex demonstratis, rectæ RF : ergo summa curvæ OR et rectæ RF est æqualis rectæ HQ. Quod secundo loco fuit probandum.

Patet itaque rectam EB in puncto E secundam curvam tangere, quod erat demonstrandum.

SIT ΔM (*), in nona figura (fig. 130), curva nostra parabolica GKA , ejus altitudo AE , semibasis GE , rectum latus AD , ejus nona pars, ut supra, sit CD , et recta AC bifariam secetur in B . A priori hac curvâ formetur alia, versus punctum G , quæ sit GNS , occurrens axi prioris in S , et novæ hujus curvæ proprietas hæc sit ut, sumpto quovis puncto,

Fig. 130 (9).



ut F , et erectâ perpendiculari FKN occurrente duabus curvis in K et N , recta FN sit semper æqualis curvæ prioris portioni GK . Ducatur parallela basi KM , et ad idem punctum K ducatur recta TKH tangens priorem et occurrens axi in T et basi in H ; per punctum vero N , in secunda curva, ducatur tangens $RNXI$ occurrens basi in I , et a punctis quibuscumque, in ea ex utraque parte sumptis, ut R et X , demittantur in basim perpendiculares XY et RV .

Ex præcedentibus patet quadratum tangētis KT in priore curva ad quadratum FE , sive

quadratum KL ad quadratum FV esse semper
ut rectam FE , una cum recta AB , ad ipsam AB ;

sed

ut quadratum KT ad quadratum EE sive ad quadratum KM ,
ita quadratum KH ad quadratum HF (propter parallelas) :

(*) Ici commence la démonstration d'un nouveau lemme qui devrait être compté comme proposition VII, ce qui figure ci-après sous ce dernier titre n'étant, en fait, que la démonstration ajournée de la proposition V (page 227), dont le numérotage a été omis.

ergo

quadratum \mathbf{KH} est ad quadratum \mathbf{HF} ut recta \mathbf{FE} , una cum \mathbf{AB} , ad \mathbf{AB} .

Ut autem quadratum \mathbf{KH} ad quadratum \mathbf{HF} ,

ita, ex præcedente propositione,

quadratum rectæ \mathbf{FN} ad quadratum rectæ \mathbf{FI} :

quum enim latera, ex vi illius propositionis, sint proportionalia, erunt proportionalia et quadrata. Ergo

quadratum \mathbf{NF} ad quadratum \mathbf{FI} est ut recta \mathbf{FE} , una cum \mathbf{AB} , ad \mathbf{AB} ,

et componendo, quadrata duo \mathbf{NF} et \mathbf{FI} , sive unicum

quadratum \mathbf{NI} erit ad quadratum \mathbf{FI} ut \mathbf{FE} , una cum \mathbf{AB} bis, ad \mathbf{AB} .

Sed

ut quadratum \mathbf{NI} ad quadratum \mathbf{FI} ,

ita quadratum \mathbf{RN} ad quadratum rectæ \mathbf{FV} ex una parte,

et ita quadratum rectæ \mathbf{NX} ad quadratum rectæ \mathbf{FY} ex altera :

ergo, sumpto quovis puncto in secunda hac curva, ut \mathbf{N} , erit semper

ut quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte
ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ,
ita summa rectæ \mathbf{FE} , una cum \mathbf{AB} bis, ad \mathbf{AB} .

Si igitur basi \mathbf{GE} ponatur in directum recta \mathbf{EO} rectæ \mathbf{AB} dupla, et ad punctum \mathbf{O} erigatur perpendicularis \mathbf{OP} ipsi \mathbf{AB} æqualis, erit semper ut quadratum portionis \mathbf{NR} , in hac secunda curva, ad quadratum portionis basis \mathbf{FV} , vel ut quadratum portionis tangentis \mathbf{NX} ad quadratum portionis basis \mathbf{FY} , ita recta \mathbf{FO} ad rectam \mathbf{OP} .

His ita se habentibus, patet cæteras in infinitum curvas, modo quem supra indicavimus describendas, ejus esse naturæ ut :

In tertia, verbi gratia, quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ sit ut portio basis \mathbf{FE} initium sumens a puncto \mathbf{F} , in quo cadit perpendicularis a puncto contactûs in basim demissa, una cum recta \mathbf{AB} *ter* sumptâ, ad ipsam \mathbf{AB} ;

In quarta curva, erit ut quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ ut recta FE, una cum AB *quater* sumptâ, ad ipsam AB;

Et sic de reliquis in infinitum.

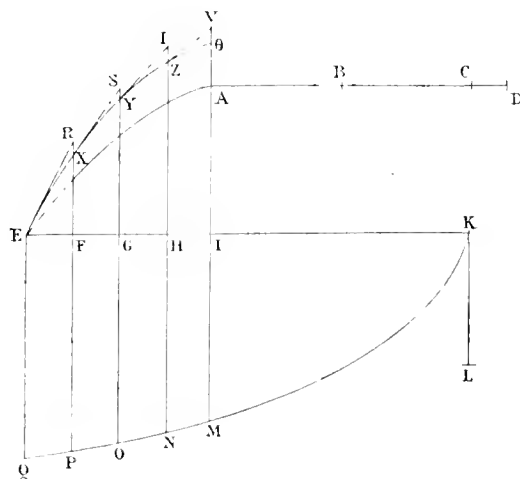
Eadem enim semper demonstratio, ut evidens est, in omnibus casibus locum habet.

Nec difficilis, hoc supposito, ad theorema generale erit aditus.

PROPOSITIO VII.

Esto, in figura decima (fig. 131), curva nostra parabolica EA, cujus axis AI, semibasis IE. Ab ea formetur secunda curva EXYZ θ , cujus ea

Fig. 131 (10).



sit natura, ut supra diximus, ut quævis applicata FX sit æqualis portioni prioris curvæ ab applicata illa, seu mavis vocare perpendicularem, abscissæ. Dividatur basis in quotlibet partes æquales EF, FG, GH, HI, et ducantur a punctis F, G, H perpendiculares secantes novam hanc secundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus AD, a quo abscindatur nona pars CD, et reliqua AC bisecetur in B. Rectæ AB bis sumptæ fiat æqualis recta IK quæ sit in directum basi, et ad punctum K erigatur perpendicularis KL æqualis rectæ AB.

Per punctum K et axem KE intelligatur describi parabole simplex (sive Archimedeæ), cujus rectum latus KL, et sit illa parabole KMOQ. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem et occurrentes huic parabole in punctis Q, P, O, N, M.

Ex corollario præcedentis, quum curva EXΘ sit secunda curva a priore derivata seu formata eâ ratione quam jam sæpius explicimus, sequitur, sumpto in ea quolibet puncto, ut Y, et ductâ portione tangentis YT, esse

ut quadratum YT ad quadratum GH, — ita rectam KG ad rectam KL.

Sed, ut recta GK ad rectam KL, ita, singulis in rectam KL ductis,

rectangulum GKL ad quadratum KL;

ex natura autem paraboles simplicis, rectangulum GKL aequatur quadrato applicatæ GO : ergo

quadratum YT est ad quadratum GH ut quadratum GO ad quadratum KL, ideoque

ut recta YT ad rectam GH, — ita recta GO ad rectam KL.

Rectangulum itaque sub extremis aequatur rectangulo sub mediis : rectangulum ergo sub GO in GH aequatur rectangulo sub KL in YT.

Si igitur ducantur alie tangentēs ER, NS et ZV, occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V, probabitur similiter

rectangulum sub QE in EF — aequari — rectangulo sub KL in ER :

item

rectangulum sub PF in FG — aequari — rectangulo sub KL in NS :

et sic de reliquis in infinitum.

Unde tandem, per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod, in quarta propositione hujus, indicavimus artificio, conficietur et concludetur segmentum parabolicum EQM aequari rectangulo sub

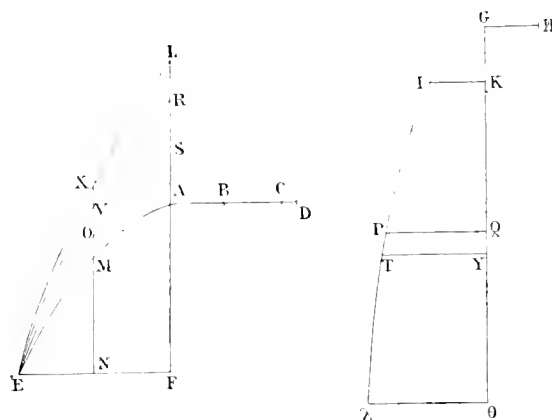
KL in secundam curvam EX9; sicut et singula segmenta parabolica, EQPF verbi gratia, rectangulo sub KL in portionem curvæ EX, vel segmentum EQOG rectangulo sub KL in portionem curvæ EXY, et sic in infinitum.

Dantur autem in rectilineis hæc omnia segmenta parabolica, ex vi quadraturæ parabolæ ab Archimede demonstratæ, et datur etiam recta KL : ergo dantur tam tota secunda curva EX⁹ quam ipsius portiones EX, EY etc., per rectas perpendiculares ad puncta F, G < etc. > data abscissæ.

Ad tertiæ curvæ cum rectâ datâ aequalitatem, similis fiet constructio, nisi quod recta IK ponetur *tripla* rectæ AB; in quarta curva, eadem IK ponetur *quadrupla* rectæ AB, et tandem generalis inter omnes istas in infinitum curvas a priori derivandas ita statuetur ratio : erunt nempe singulæ inter se ut segmenta parabolica ejusdem paraboles et ejusdem altitudinis, quæ a vertice paraboles distabunt per rectum latus toties sumptum quotæ erunt in ordine curvæ inter se comparandæ.

Exempli gratia, sit, in undecima figura (*fig.* 132), curva nostra

Fig. 15. (11)



parabolica EMA, cujus axis AF, semibasis EF, rectum latus AD, a quo demptà nonà parte CD, reliqua AC bisecetur in B; et a primà illà curvâ formetur secunda EOS ejus naturæ ut, sumpto quolibet puncto in

base N , recta NO , perpendicularis ad basim et occurrens curvis in M et O , sit aequalis portioni prioris curvæ EM . A secunda formetur tertia EVR , in qua recta NV sit aequalis portioni secundæ curvæ EO ; item a tertia EVR formetur quarta EXL , in qua recta NX sit aequalis portioni tertiæ curvæ EV . Exponatur separatim parabole simplex sive Archimedeæ, cujus axis infinitus $GKQY$, vertex G , rectum latus GH æquale rectæ AB . Quaritur ratio, verbi gratia, quartæ curvæ EXL ad primam EMA .

Quia prior ex ipsis est quarta ordine, ab axe abscindenda est GY quadrupla recti lateris GH , deinde ponenda ipsi in directum recta $Y\theta$ aequalis semibasi EF , et ducendæ applicatæ rectæ YT , $\theta\lambda$. Quia verò posterior ex duabus comparandis est prima ordine, abscindenda est ab axe recta GK recto lateri semel tantum aequalis, deinde ipsi ponenda in directum recta KQ semibasi etiam EF aequalis, et ducendæ applicatæ KL , QP .

Erit, ex demonstratis et canone generali ab illis deducto, ut segmentum parabolicum $YT\lambda\theta$ ad segmentum parabolicum $KIPQ$, ita quarta curva EXL ad primam EMA . Sed ratio segmentorum parabolicorum inter se data est, ex Archimede : ergo et ratio curvarum inter se data erit. Data est autem prima, ex demonstratis : datur igitur et quarta, et ipsi recta data aequalis assignari potest, et perpetua illa ratio, remotâ, si libet, parabolâ, ad phrasim geometricam ope regulæ tantum et circini accommodari.

Quod autem de totis jam probatum et in canonem deductum est, idem de portionibus illarum curvarum inter se comparandis contingere, beneficio segmentorum parabolicorum portiones semibasis ipsis curvarum portionibus oppositas pro altitudine habentium, quis non videt?

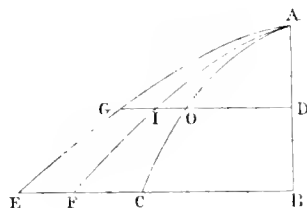
Nunc autem nec de solidis ex dictis in infinitum curvis conficiendis, nec de superficiebus ipsorum curvis, nec de centrâ gravitatum aut linearum istarum aut dictorum solidorum aut superficierum curvarum, adjungimus, quum methodi hac de re generales a summis et insignibus

geometris (') jam vulgatæ ista omnia, post cognitam specificam curvæ datæ proprietatem, ignorari non sinant, licet in multis casibus propriam ab unoquoque adjungi operi industriam non inutile futurum existimemus.

Sed antequam manum de tabula tollam, succurrit examinanda sequens propositio :

Sit, in figura duodecima (fig. 133), curva nostra parabolica COA, cujus vertex A, axis AB, semibasis CB. Ab ea formantur alie curvæ infinitæ, modo quem jam explicuimus, non ex parte baseos ut supra, sed ex

Fig. 133 (12).



parte verticis. Sint illæ curvæ a prima effingendæ AIF, AGE etc. in infinitum cā conditione ut, sumpto quovis puncto in axe D et ductâ ad axem perpendiculari DOIG secante curvas in punctis O, I, G, recta DI sit in secunda curva semper æqualis portioni primæ curvæ AO, item recta DG in tertia curva sit semper æqualis portioni secundæ curvæ AI, et sic in infinitum. Hujusmodi omnes curvæ non solum specie inter se et a prima AOC different, sed etiam ab iis quas ex parte baseos supra effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes AIF, AGE etc., sic in infinitum effingendæ, datis rectis an vero aliis curvis sint æquales.

Inquirant illud Geometrae et miraculum augeri experientur : sane, si methodi, quibus utuntur ad dimensionem curvarum, sint generales

(4) Fermat fait ici allusion aux travaux de Pascal et de Roberval, aussi bien qu'aux siens propres. Quant aux courbes dont il va parler désormais, elles diffèrent bien de la parabole $y^3 = ax \cdot x^2$ (développée de la parabole ordinaire), mais elles peuvent encore toutes être superposées à une seule d'entre elles par une simple translation. En tout cas, la rectification de cette nouvelle courbe, qui est la développée de l'hyperbole équilatère, appartient sans conteste à Fermat.

et sufficientes, quod ipsis affirmantibus in dubium revocare non ausim, primo statim obtutu rem factam habebunt et a labore superfluo geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in superioribus demonstrationibus concisum nimis invenerint, id aut suppleant rogo, aut condonent.

APPENDIX AD DISSERTATIONEM

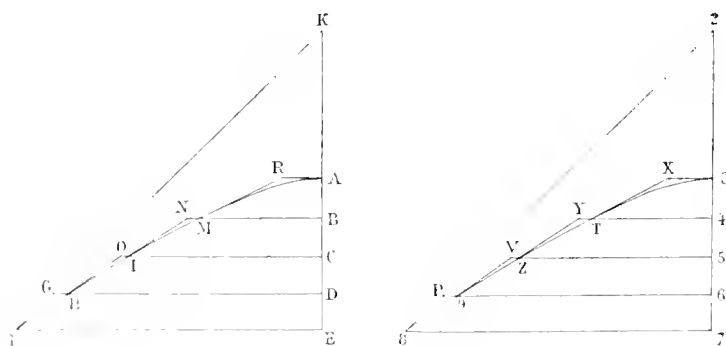
DE LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS COMPARATIONE.

Ut ultima, quam in Dissertatione proposuimus, questioni satisfiat, præmittendæ videntur propositiones sequentes :

PROPOSITIO I.

Sint, in figura prima (fig. 134), due curvæ AIF, 3Z8, quarum axes AE, 37 sint inter se æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ, in utraque figura, æquali a vertice intervallo distent.

Fig. 134 (1).



Sint, exempli gratia, applicatæ prioris BM, CI, DI, EF; posterioris vero applicatæ sint 4T, 5Z, 69, 78; et sit rectæ AB, quæ designat intervallum applicatæ BM a vertice, æqualis recta 43, quæ designat inter-

vallum etiam applicatæ 4T a vertice. Sit pariter CA æqualis 53; item DA æqualis 63; denique EA, quod jam supposueramus, æqualis 73.

Si singulæ ex applicatis sint semper ad abscissas per tangentes ab axe in ratione correlatarum,

hoc est: si, ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M ex una parte et ad puncta 8, 9, Z, T ex altera, semper contingat ut applicata FE, verbi gratia, sit ad rectam KE, quam tangens FK abscindit ab axe, in eadem ratione quæ est applicatæ 87 ad rectam 72, quam tangens 82 ab axe pariter abscindit; item applicata DH sit ad abscissam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 69 ab abscissam ab axe per tangentem ad punctum 9 ductam: et sic de reliquis;

aiò duas istas curvas AIF, 3Z8 esse inter se æquales, imò et similes ideoque easdem, et applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ a vertice æqualiter distant esse pariter æquales.

Ductis enim ad puncta H, I, M, in prima figura, portionibus tangentium HO, IN, MR, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R; item, ductis portionibus tangentium, in secunda figura, 9V, ZY, TX, quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X, ex suppositione

ut FE ad EK (in prima figura), ita est 87 ad 72 (in secunda).

Sed anguli ad puncta E et 7 sunt recti: ergo triangula FEK, 872 sunt similia;

ut ergo FK ad KE, ita 82 ad 72.

Sed

ut FK ad KE,

ita (productâ applicatâ DH ad punctum G) recta FG ad rectam DE,

et

ut 82 ad 72,

ita (productâ applicatâ 69 ad punctum P) recta SP ad 67:

ergo

ut recta FG ad rectam DE, ita recta SP ad 67.

Sunt autem rectæ DE, 67 æquales, quum rectæ EA et 73, item rectæ

DA et 63 sint inter se æquales : ergo et portiones tangentium EG, 8P erunt inter se æquales.

Similiter probabimus portionem tangentis HO æqualem esse portioni tangentis qV; item portionem tangentis IN æqualem esse portioni tangentis ZY; denique portionem tangentis MR æqualem esse portioni tangentis TX.

Quum ergo series tangentium in prima figura sit æqualis seriei tangentium in secunda, per abductionem ad impossibile more Archimedeo facile concluditur curvam MF curvæ 3Z8 æqualem esse, quod primo loco fuit probandum; imo et pariter concluditur portiones curvæ correlatas esse inter se æquales : portionem nempe FH portioni 89, portionem curvæ HI portioni 9Z, et sic de reliquis.

Superest probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius esse æquales.

Quum, ex suppositione, applicatæ sint semper ad abscissas ab axe per tangentes in eadem utrobique ratione, ergo anguli GFE, P 87, qui fiunt ab intersectione tangentium et applicatarum, erunt inter se æquales; item anguli OHD et V96; item anguli NIC et YZ5; denique anguli RMB et XT4. Quum ergo portiones omnes prioris curvæ, FH, HI, IM, MA, sint æquales portionibus posterioris, 89, 9Z, ZT, T3, singulæ singulis, imo et earundem portionum sit eadem utrobique inclinatio (inclinationem enim curvarum metiuntur tangentes, quæ in utraque figura æquales semper, ut probavimus, conficiunt angulos), ergo curvæ AMHF, 3TZ98 non solum sunt inter se æquales, sed etiam similes : unde, si intelligentur altera alteri superponi, congruent omnino, ideoque non solum axes sed applicatas æquales, aut easdem potius, habebunt. Quod secundo loco fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Sint duæ, in secunda figura (fig. 135), parabolæ ejusdem naturæ AOD, AIG, quarum axes sint AC, XF, semibases DC, GF, et sit, verbi gratia,

ut cubus DC ad cubum applicatæ BO,
ita quadratum CA ad quadratum BA,

et similiter

ut cubus GF ad cubum applicatæ AY,

ita quadratum FX ad quadratum YX

(licet enim propositio sit generalis, a parabola nostra non discedimus):
sit autem ut axis unius ad semibasem, ita etiam axis alterius ad semiba-
sem, nempe

ut axis CA ad semibasem DC, ita axis XF ad semibasem GF :

Aio duas hasce parabolas esse inter se in ratione axium vel semibasium.
 hoc est

curvam AOD esse ad curvam XIG ut est axis AC ad axem XF,

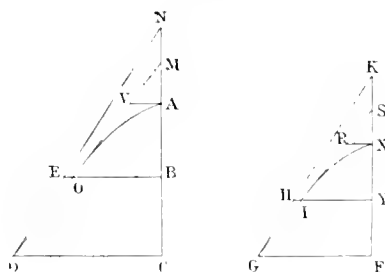
vel ut semibasis CD ad semibasem GF :

hæ quippe duæ rationes, ex suppositione, sunt eadem.

Demonstratio est in promptu.

Secetur enim uterque axis in quotlibet partes aequales. Duas tan-

Fig. 135. 11.



tum, ad vitandam confusionem et prolixitatem, assumemus : secetur ergo bifariam axis AC in B et axis FX in Y et, ductis applicatis BO, YI, ducantur ad puncta D, O tangentes DN, OM, quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, posterior vero rectæ AV, applicatis parallele, in puncto V; item, in altera figura, ducantur ad puncta G, I tangentes GK, IS, occurrentes applicatæ YI et ipsi parallele XR in punctis H, R.

Ex suppositione est

$$\text{ut } DC \text{ ad } CA, \quad \text{ita } GF \text{ ad } FX;$$

sed, ex natura istius paraboles,

$$\text{recta } CA \text{ est ad } CN \text{ abscissam per tangentem ut } 2 \text{ ad } 3;$$

item

$$\text{recta } FX \text{ est etiam ad rectam } FK \text{ per tangentem abscissam ut } 2 \text{ ad } 3;$$

ergo, ex æquo, est

$$\text{ut } DC \text{ ad } CN, \quad \text{ita } GF \text{ ad } FK.$$

Sunt ergo æquiangula triangula DNC, GKF : ergo

$$\text{ut } DN \text{ ad } NC, \quad \text{ita } GK \text{ ad } KF.$$

Sed

$$\text{ut } DN \text{ ad } NC, \quad \text{ita } DE \text{ ad } CB,$$

et

$$\text{ut } GK \text{ ad } KF, \quad \text{ita } GH \text{ ad } FY;$$

ergo

$$\text{ut } DE \text{ ad } CB, \quad \text{ita } GH \text{ ad } FY.$$

Similiter probabitur esse

$$\text{ut } OV \text{ ad } BA, \quad \text{ita } IR \text{ ad } XY.$$

Quum ergo portiones axium, AB, BC ex una parte et XY, YF ex altera, sint inter se æquales, ergo

$$\text{ut omnes tangentium portiones } DE, OV \text{ ad totum axem } AC,$$

$$\text{ita omnes tangentium portiones } GH, IR \text{ ad totum axem } XF.$$

Omnes autem portiones tangentium DE et OV et plures, si opus sit, beneficio abductionis ad impossibile, ut jam sapius et indicatum et probatum est, designant totam curvam DOA; item omnes portiones tangentium GH, IR et plures etiam, si opus sit, designant totam curvam GIX : ergo

$$\text{ut curva } DOA \text{ ad axem } AC, \quad \text{ita curva } GIX \text{ ad axem } XF.$$

et, vicissim et convertendo, erit

axis AC ad axem XF sive basis DC (ex suppositione) ad basin GF
ut curva DOA ad curvam GIX.

Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

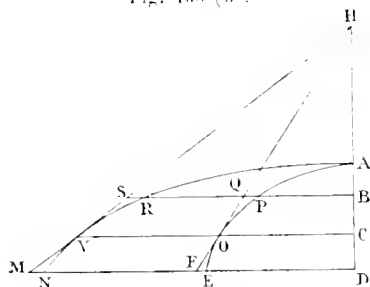
Esto, in tertia figura (fig. 136), curva AO, cujus axis AC, basis CO, et ab ea intelligatur formari alia curva ejusdem et axis et verticis, in qua applicatae sint semper in ratione applicatarum prioris curvae : sit nempe

ut basis CO ad basin CV,

ita applicata BP prioris curvae ad applicatam BR posterioris curvae
et ita applicata DE ad applicatam DN,

et sic in infinitum; si ad punctum quodlibet prioris curvae, ut O, ducatur tangens OH cum axe conveniens in puncto H, et continuetur CO donec occurrat secunda curvae in V, aio rectam, quae puncta V et H conjungit, tangere secundam curvam, et semper contingere ut tangentes correlatae in utraque curva ad idem punctum axi occurrant.

Fig. 136 (3.)



Ducantur enim applicatae BPR, DEN, occurrentes curvis in punctis P, R, E, N et rectis OH, VH productis in punctis Q, S, F, M.

Si probaverimus rectam BS, supra rectam CV ductam, semper majorem esse rectâ BR, item rectam DM, inferius ductam, esse etiam semper majorem applicatâ DN, patebit rectam MVSH tangere secundam curvam in puncto V.

Ex constructione

ut CO ad CV, — ita est applicata BP ad applicatam BR;

sed, propter parallelas COV, BQS, quæ secantur a tribus rectis CH, OH, VH ad idem punctum vergentibus, est etiam

ut CO ad CV, — ita recta BQ ad rectam BS :

ergo

ut recta BP ad rectam BR, — ita est recta BQ ad rectam BS,

et, vicissim,

ut recta BP ad rectam BQ, — ita est recta BR ad rectam BS.

Quum autem recta OQH tangat priorem curvam in puncto O, recta BQ erit major rectâ BP : ergo etiam recta BS erit major rectâ BR. Quod primo loco fuit probandum.

Nec dissimilis in applicata inferius sumptâ erit demonstratio : ex suppositione enim est

ut CO ad CV, — ita DE ad DN,

et, propter parallelas, est etiam

ut CO ad CV, — ita DF ad DM :

ergo

ut DE ad DN, — ita est DF ad DM.

Est autem DE minor DF : ergo et DN ipsâ DM minor erit.

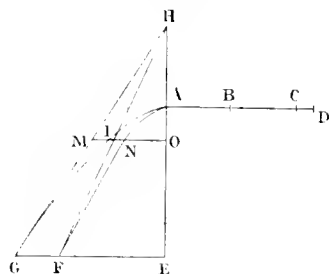
Recta itaque MVSH in puncto V tangit secundam curvam.

Lemma ad id quod sequitur.

Sit, in quarta figura (*fig. 137*), parabole nostra GLA, ejus axis AE, semibasis EFG, tangens GH. Constituatur ad eundem axem AE alia parabole ejusdem nature FNA, ejus semibasis EF sit potestate *subdupla* prioris semibasis EG, et semper contingat applicatam quamvis, ut NO, applicatæ OI ad priorem curvam esse pariter potestate subduplam. Sit rectum prioris GLA paraboles latus recta AD, ejus nona pars

sit CD, et reliqua AC bisecetur in B. Ducatur ad secundam parabolam tangens ad punctum F recta FH, quæ in eodem puncto H cum axe conveniet, non solum ex vi propositionis præcedentis, sed quia, ex natura

Fig. 17 (4).



istarum parabolarum, in utraq[ue] recta EA est ad rectam EH ut 2 ad 3, ex superius demonstratis.

Aio

quadratum FE esse ad quadratum EH
ut est dimidia rectæ AB ad rectam EG.

Jam enim, in propositione III Dissertationis, demonstratum est

quadratum GE esse ad quadratum EH ut est recta AB ad rectam EG :

ergo, sumptis antecedentium dimidiis, erit

ut quadratum EF,

quod supponimus esse dimidium quadrati GE,

ad quadratum EH, ita dimidia rectæ AB ad rectam GE

Probabimus pariter, si recta FE sit potestate subtripla rectæ GE, hoc est, si quadratum FE sit subtriplum quadrati GE, esse

ut quadratum FE ad quadratum EH,
ita tertiam partem rectæ AB ad rectam GE;

et sic de subquadruplo, subquintuplo et reliquis in infinitum.

Quæ autem, in ratione *subdupla*, probaverimus esse

ut quadratum FE ad quadratum EH, ita dimidiam AB ad rectam GE,

ergo, componendo, erit ut summa quadratorum FE, EH, sive ut unicuique

quadratum FH ad quadratum EH,
ita dimidia AB una cum GE ad ipsam GE.

Si vero recta EF sit potestate *subtripla* rectæ GE, erit

ut quadratum FH ad quadratum EH,
ita tertia pars AB una cum GE ad ipsam GE.

Si recta EF sit potestate *subquadrupla* rectæ GE, erit

ut quadratum FH ad quadratum EH,
ita quarta pars AB una cum EG ad ipsam EG ;

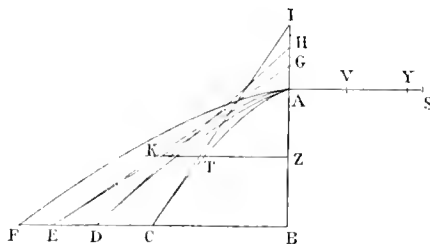
et sic in infinitum et in quacunque applicata idem continget.

PROPOSITIO IV.

His præmissis, theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit, in figura quinta (*fig. 138*), parabole nostra AC, cujus axis AB, semibasis BC, et ab ea formentur alie in infinitum curvæ AD, AE, AF,

Fig. 138 (5).

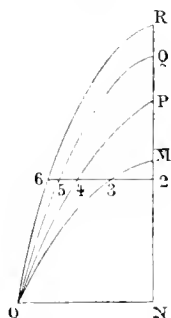


quarum ea sit proprietas ut, ductâ quâlibet applicatâ BCDEF, recta BD sit semper æqualis priori curvæ CA, recta BE æqualis secundæ curvæ AD, recta BF æqualis tertiæ curvæ AE, idque semper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat : Aio omnes illas et singulas in infinitum curvas AD, AE, AF etc. esse semper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in Dissertatione, diversâ et dissimili ex parte baseos methodo, construximus.

Theorema generale ita se habet :

Exponatur separatim (*fig. 139*) eadem parabole $O 3 M$ aequalis omnino et similis ipsi AC , cujus ideo axis MN aequalis est axi AB et semibasis ON semibasi BC (separatim enim, ad vitandam confusionem, figuram construendam duximus). Fiat recta NP rectae NM potestate dupla, recta NQ ejusdem NM potestate tripla, recta NR ejusdem NM potestate quadrupla, et sic in infinitum. Manente autem eadem semibasi ON ,

Fig. 139 (5).



construantur parabolae per vertices P , Q , R ejusdem cum parabola $O 3 M$ vel AC naturae, et sint ille $O 4 P$, $O 5 Q$, $O 6 R$ etc. Aio parabolam $O 4 P$ curvae AD esse aequalem, parabolam vero $O 5 Q$ curvae AE esse aequalem, denique parabolam $O 6 R$ curvae AF esse aequalem, et sic in infinitum.

Quoniam in nostris parabolis $O 4 P$, $O 5 Q$, $O 6 R$, ducta applicata $2 3 \{ 5 6$, sit semper, ex natura dictarum parabolarum,

ut cubus rectae ON ad cubum rectae $4 2$,

ita quadratum rectae sive axis NP ad quadratum $P 2$;

item

ut cubus ON ad cubum $5 2$, ita quadratum NQ ad quadratum $Q 2$;

denique

ut cubus ON ad cubum $6 2$, ita quadratum NR ad quadratum $R 2$.

patet, ex praedemonstratis in Dissertatione, singulas ex istis parabolis rectis datis aequales esse : ergo, post demonstrationem theorematis

ex eadem Dissertationis propositione,

quadratum BE est ad quadratum rectæ BG a tangente EG abscissæ :

ergo

ut quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ BG,

ita est recta AV una cum BC bis sumptâ ad ipsam BC.

Similiter probabitur, si ducatur ad curvam EA applicata ZTK secans curvam AC in T, et intelligatur ad punctum K duci tangens ad curvam AKE, esse pariter

ut quadratum KZ ad quadratum rectæ

quam tangens per punctum K ducta ab axe abscindit,

ita rectam AV una cum ZT bis sumptâ ad ipsam ZT,

et sic semper continget.

Exponatur separatim ad vitandam confusionem eadem curva AKE, quæ sit in figura separata (fig. 140) $\beta\varphi\lambda$. Basis $\lambda\delta$ sit itaque aqualis

Fig. 138 (5).

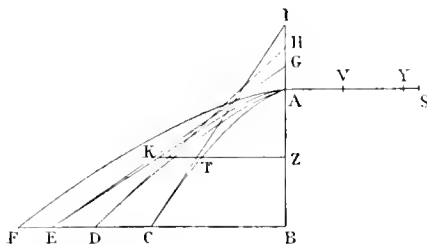
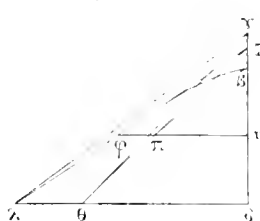


Fig. 140 (5).



basi EB, tangens $\lambda\gamma$ tangenti EG, axis $\delta\beta$ axi BA, abscissa per tangentem ab axe $\delta\gamma$ abscissæ BG, applicata $\nu\varphi$ applicatæ ZK. Ab hac curva $\lambda\varphi\beta$ formetur alia ipsâ minor $\theta\pi\beta$, ea conditione ut applicatæ novæ istius curvæ sint semper subduplæ potestate applicatarum prioris : verbi gratia, recta $\delta\theta$ sit subdupla potestate rectæ $\delta\lambda$; item applicata $\nu\pi$ sit subdupla potestate rectæ $\nu\varphi$; et sic de reliquis. Ducantur in hac nova curva, tangentes ad puncta θ , π , rectæ $\theta\gamma$, $\pi\gamma$.

Ex præcedente tertia propositione patet tangentes $\theta\gamma$, $\lambda\gamma$ ad idem punctum γ cum axe concurrere; item tangentes ad puncta φ , π ductas

ad idem etiam punctum, verbi gratia γ , cum axe concurrere, quum applicatae utriusque figurae sint in eadem semper inter se ratione.

Exponatur adhuc separatim (*fig. 141*) parabole ejusdem cum para-

Fig. 139 (5).

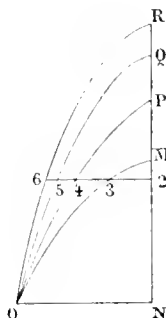
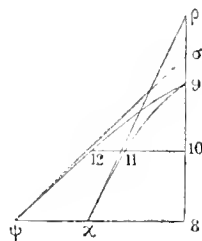


Fig. 141 (5).



bolis OM, OP etc. (*fig. 139*) naturae, cujus axis 98 sit aequalis axi MN sive AB sive 32 , semibasis autem 8γ sit subdupla potestate semibaseos NO sive BC; et sit illa 7119 , a qua formetur alia 912ψ , cujus idem sit axis 98 , applicata vero 8ψ sit aequalis curvae 7119 , item applicata 101112 sit aequalis curvae 119 , et sic de reliquis.

Probandum primo curvas $9\pi3$ et $\psi129$ esse easdem, hoc est, omnino aequales et similes. Quod sic demonstrabitur :

Probavimus

quadratum BE esse ad quadratum BG,

sive quadratum 7δ ad quadratum $\delta\gamma$,

ut rectam AV una cum CB bis sumptâ ad rectam CB;

ergo, sumptis antecedentium dimidiis, quum posuerimus rectam 9δ esse potestate subduplam rectae 3λ , quadratum rectae 9δ erit dimidium quadrati 3δ , ideoque

ut quadratum 9δ ad quadratum $\delta\gamma$,

ita dimidia AV una cum CB erit ad ipsam CB.

Similiter probabimus in alia qualibet applicata, ut $\pi\gamma$, esse

quadratum $\pi\gamma$ ad quadratum $\gamma\gamma$

ut dimidiam AV una cum ZT ad ipsam ZT;

et sic de reliquis.

Disquirendum jam an eadem proprietas curvæ $\psi 129$ conveniat.
Quod ita fiet :

In curva $\gamma 119$, cujus semibasis $\gamma 8$ est potestate subdupla semiba-

Fig. 138 (5).

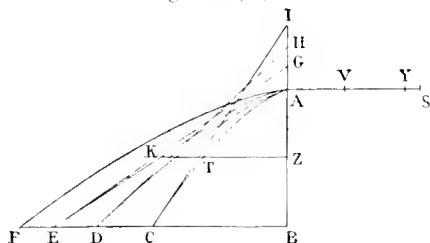
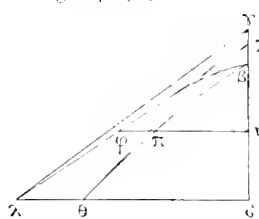


Fig. 140 (5).



seos BC et axis 89 æqualis axi AB, ex lemmate superiori, ductis tangentibus ad puncta γ , ψ rectis $\gamma\rho$, $\psi\sigma$,

quadratum $\gamma 8$ est ad quadratum 8ρ ut dimidia rectæ AV ad rectam CB;
recta enim $\gamma 8$ est potestate subdupla rectæ CB : ergo, componendo,

quadratum $\gamma\rho$ est ad quadratum 8ρ
ut dimidia AV una cum CB ad ipsam CB.

Similiter, si intelligatur recta 910 æqualis rectæ AZ, hoc est si puncta 10 et Z æqualiter a vertice distent,

quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abscissæ ab axe
ut dimidia AV una cum recta ZT ad ipsam ZT.

Sed,

ut quadratum $\gamma\rho$ ad quadratum 8ρ , ita,

ex propositione VI Dissertationis, est

quadratum applicatæ $\psi 8$ ad quadratum a tangente abscissæ 8σ ,

(et, similiter,

ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ
ad quadratum abscissæ ab axe,
ita quadratum applicatæ 12 10

ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam) :

ergo

ut quadratum $\psi 8$ ad quadratum 8σ , ita dimidia AV una cum BC ad BC.

$O4P$, $Z119$ sint ejusdem naturæ et tam axis quam basis paraboles $Z119$ sint potestate subduplæ axis et baseos paraboles $O4P$, ergo et ipsa parabole $Z119$, ex propositione II hujus Appendicis, erit subdupla paraboles $O4P$. Quum ergo, ut jam probavimus, eadem parabole $Z119$ sit subdupla tam paraboles $O4P$ quam curvæ AD , curva AD et ipsa parabole $O4P$ erunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Nec dissimili, ad probandum curvam AE æqualem esse parabole $O5Q$, utendum artificio.

Quum enim

quadratum BE esse ad quadratum BG

ut est recta AV una cum BC bis sumptâ ad ipsam BC

probatum fuerit, ergo, componendo et ulterius progrediendo, erit

quadratum tangentis EG ad quadratum rectæ BG

ut recta AV una cum BC ter sumptâ ad ipsam BC .

Est autem, ex prædemonstratis in sexta propositione Dissertationis,

ut quadratum EG ad quadratum BG , ita quadratum BF

ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam :

ergo

quadratum BF erit ad quadratum illius abscissæ

ut est recta AV una cum BC ter ad BC .

In reliquis imitabimur omnino et sequemur vestigia demonstrationis

Fig. 139 (5).

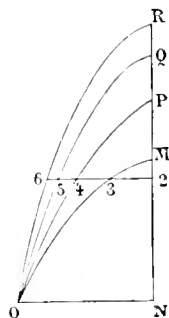
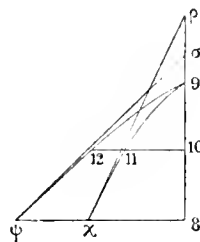


Fig. 140 (5).



precedentis, nisi quod in figura separata (*fig. 140*), postquam AE

fuert facta æqualis ipsi BF, recta $\delta\theta$ fiet subtripla potestate ipsius BF vel $\delta\lambda$, curva $\lambda\varphi\beta$ curvæ FA fiet æqualis, curva $\theta\pi\beta$ ejus erit nature ut omnes applicatæ sequantur rationem basium $\lambda\delta$, $\theta\delta$. In alia autem figura separata (fig. 141) in qua curvæ $\gamma\iota\iota\zeta$ et $\gamma\iota\iota\psi$, recta $\gamma\delta$ erit æqualis, ut supra, rectæ MN vel AB vel $\beta\delta$, basis vero $\delta\zeta$ fiet subtripla potestate baseos ON vel CB, et fiet $\zeta\iota\iota\gamma$ parabole ejusdem cum paraboli CEA vel OBM nature; a qua quum formabitur curva $\psi\iota\iota\gamma$, ejus applicatæ $\delta\psi$, $\iota\iota\iota\psi$ sint, ut supra, æquales curvis $\zeta\gamma$, $\iota\iota\gamma$, probabimus, ut supra, curvam $\beta\pi\theta$ et curvam $\gamma\iota\iota\zeta$ esse inter se æquales et similes, hoc est, easdem.

Unde concluditur bases $\theta\delta$ et $\psi\delta$ esse æquales, ideoque basim $\psi\delta$ sive curvam $\gamma\iota\iota\zeta$ esse potestate subtripulam rectæ $\delta\lambda$ sive BF sive curvæ AE; est autem etiam, ex prædemonstratis, parabole $\zeta\iota\iota\gamma$ subtripla potestate paraboles OMQ; ergo curva AE et parabole OMQ erunt inter se æquales.

Eodem ratiocinio in ulterioribus casibus utemur et generalem nostri theorematis veritatem evincemus.

Qui autem superiorem Dissertationem et hanc ad ipsam Appendicem accuratius legerint, præcipua methodi nostræ fundamenta statim agnoscent, et ex eis deduci facillimam curvarum dimensionem deprehendent.



DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANSMUTATIONE ET EMENDATIONE

AD MULTIMODAM
CURVILINEORUM INTER SE VEL CUM RECTILINEIS COMPARATIONEM,
CUI ANNECTITUR
PROPORTIONIS GEOMETRICÆ
IN QUADRANDIS INFINITIS PARABOLIS ET HYPERBOLIS
USUS.

In unica paraboles quadratura proportionem geometricam usurpavit Archimedes ⁽¹⁾; in reliquis quantitatum heterogenearum comparationibus, arithmeticae duntaxat proportioni sese adstrinxit. An ideo quia proportionem geometricam minus $\tau\epsilon\pi\rho\alpha\gamma\omega\nu\acute{\iota}\zeta\omicron\upsilon\tau\alpha\chi$ est expertus? An vero quia peculiare ab illa proportionem petitum artificium, ad quadrandam primariam parabolam, ad ultiores derivari vix potest? Nos certe hujusmodi proportionem quadrationum feracissimam et agnoscimus et experti sumus, et inventionem nostram, quæ eadem omnino methodo et parabolas et hyperbolas quadrat, recentioribus geometris haud illibenter impertimur.

Unico, quod notissimum est, proportionis geometricæ attributo tota hæc methodus innititur; theorema hoc est :

Datâ quâvis proportionem geometricâ, cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium ad

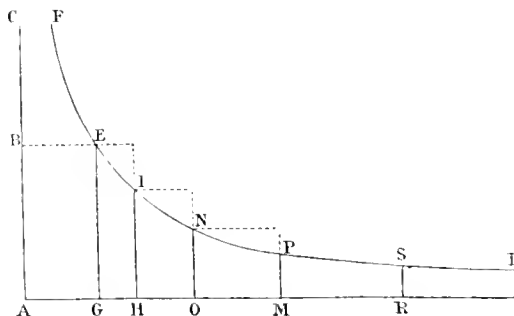
⁽¹⁾ ARCHIMÈDE, *Quadratura paraboles*, prop. 23 et 24.

minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.

Hoc posito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ.

Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas, ut DSEF (fig. 142), quarum hæc est proprietas ut, positis in quolibet

Fig. 142.



angulo dato RAC ipsarum asymptotis rectis AR, AC, in infinitum, si placet, non secus ac ipsa curva extendendis, et ductis uni asymptotòn parallelis rectis quibuscumque GE, HI, ON, MP, RS etc., sit ut potestas quædam rectæ AH ad potestatem similem rectæ AG, ita potestas rectæ GE, vel similis vel diversa a præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI. Potestates autem intelligimus, non solum quadrata, cubos, quadratoquadrata etc., quarum exponentes sunt 2, 3, 4 etc., sed etiam latera simplicia, quorum exponentis est unitas.

Ad itaque omnes in infinitum hujusmodi hyperbolas, unicà demptà quæ Apolloniæ (1) est sive primariâ, beneficio proportionis geometricæ, uniformi et perpetua methodo quadrari posse.

Exponatur, si placet, hyperbole cujus ea sit proprietas ut sit semper

ut quadratum rectæ HA ad quadratum rectæ AG,

ita recta GE ad rectam HI,

(1) Le nom d'*hyperbole*, comme ceux d'*ellipse* et de *parabole*, n'a pas été adopté avant Apollonius.

et

ut quadratum OA ad quadratum AH , — ita recta HI ad rectam ON ,

etc. Aio spatium infinitum cujus basis GE , et curva ES ex uno latere, ex alio verò asymptotos infinita GOR , aequari spatio rectilineo dato.

Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG , secundus AH , tertius AO , etc. in infinitum, et ad sese per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut, juxta methodum Archimedeam, parallelogrammum rectilineum sub GE in GH quadrilineo mixto GHE adequetur, ut loquitur Diofantus ⁽¹⁾, aut fere aequetur; item, ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH , HO , OM et similia, sint fere inter se aequalia, ut commode per $\acute{\alpha}\pi\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\alpha}\nu\ \epsilon\iota\varsigma\ \acute{\alpha}\delta\delta\acute{\nu}\nu\alpha\tau\omega\nu$, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedeæ demonstrandi ratio institui possit : quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuscumque geometris jam satis notum inculcare sæpius et iterare cogamur.

His positis, quum sit

ut AG ad AH , — ita AH ad AO , — et ita AO ad AM ,

erit pariter

ut AG ad AH , — ita intervallum GH ad HO , — et ita intervallum HO ad OM ,

etc.

Parallelogrammum autem sub EG in GH erit
ad parallelogrammum sub HI in HO
ut parallelogrammum sub HI in HO
ad parallelogrammum sub NO in OM :

quum enim ratio parallelogrammi sub GE in GH ad parallelogrammum sub HI in HO componatur ex ratione rectæ GE ad rectam HI et ex ratione rectæ GH ad rectam HO , sit autem

ut GH ad HO , — ita AG ad AH ,

ut præmonuimus, ergo ratio parallelogrammi sub EG in GH ad paral-

⁽¹⁾ Voir plus haut, page 133, note 2.

lelogrammum sub III in HO componitur ex ratione GE ad III et ex ratione AG ad AH. Sed

ut GE ad III, ita, ex constructione, HA quadratum ad quadratum GA, sive, propter proportionales,

ita recta AO ad rectam GA :

ergo ratio parallelogrammi sub EG in GH ad parallelogrammum sub III in HO componitur ex ratione AO ad AG et AG ad AH. Sed ratio AO ad AH componitur ex illis duabus : ergo parallelogrammum sub GE in GH est ad parallelogrammum sub III in HO ut OA ad HA, sive ut HA ad AG.

Similiter probabitur parallelogrammum sub III in HO esse ad parallelogrammum sub ON in OM ut AO ad HA.

Sed tres rectae quae constituunt rationes parallelogrammorum, rectae nempe AO, HA, GA, sunt proportionales ex constructione : ergo parallelogramma in infinitum sumpta, sub GE in GH, sub III in HO, sub ON in OM, etc., erunt semper continue proportionalia in ratione rectae HA ad GA. Est igitur, ex theoremate hujus methodi constitutivo,

ut GH, differentia terminorum rationis,
ad minorem terminum GA,
ita primus parallelogrammorum progressionis terminus,
hoc est parallelogrammum sub EG in GH,
ad reliqua in infinitum parallelogramma,

hoc est, ex adaequatione Archimedeae, ad figuram sub III, asymptoto HIR et curva IND in infinitum extendenda, contentam.

Sed ut HG ad GA, ita, sumptâ communi latitudine rectâ GE, parallelogrammum sub GE in GH ad parallelogrammum sub GE in GA : est igitur

ut parallelogrammum sub GE in GH
ad figuram illam infinitam cujus basis III,
ita idem parallelogrammum sub GE in GH
ad parallelogrammum sub GE in GA.

Ergo parallelogrammum sub GE in GA, quod est spatium rectilineum datum, adaequatur figuræ prædictæ; cui si addas parallelogrammum sub GE in GH, quod propter minutissimos $\pi\epsilon\mu\chi\lambda\iota\sigma\mu\omicron\varsigma$ evanescit et abit in nihilum, superest verissimum et Archimedeâ (licet prolixiore) demonstratione facillime firmandum : parallelogrammum AE, in hac hyperboles specie, aequari figuræ sub base GE, asymptoto GR et curva ED in infinitum producenda, contentæ.

Nec operosum ad omnes omnino hujusmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere. Sit enim ea *alterius*, si placet, *hyperboles* proprietas,

ut sit GE ad III ut cubus rectæ HA ad cubum rectæ GA,

et sic de reliquis.

Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut supra, serie, fiet proportionalia parallelogramma EH, IO, MN, ut supra, in infinitum : in hoc verò casu, parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, etc. ut recta AO ad GA; quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur

ut parallelogrammum EH ad figuram, ita recta OG ad GA

et, sumptâ communi latitudine GE,

ita parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GA :
est igitur

ut parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GA,
ita parallelogrammum sub GE in GH ad figuram,

et, vicissim,

ut parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GH,
ita parallelogrammum sub GE in GA ad figuram.

Ut autem

parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub HG in GE,
ita OG ad GH, sive 2 ad 1, ex adæquatione :

intervalla enim basi proxima facta sunt, ex constructione, fere aequalia inter se. Ergo, in hac hyperbole, parallelogrammum EGA, quod est aequale spatio rectilineo dato, est duplum figurae sub base GE, asymptoto GR, curva ESD in infinitum producenda, contentae.

Similis in quibuscumque aliis casibus habebit locum demonstratio, nisi quod in primaria (sive Apolloniana et simplici) hyperbole deficit ea sola ratione methodus, quia in hac parallelogramma EH, IO, NM sunt semper inter se aequalia; atque ideo, quum termini progressionis constitutivi sint inter se aequales, nulla inter eos est differentia quae totum in hoc negotio conficit mysterium.

Demonstrationem, qua probatur spatia in hyperbole communi parallelogrammis contenta esse semper inter se aequalia, non adjungimus, quum statim per se ipsa se prodant et ex hac unica proprietate, quae asserit in ea specie esse

$$\text{ut GE ad HI, ita HA ad GA,}$$

facillime derivetur.

Eadem ratione parabolae omnes omnino quadrantur, nec est ulla quae ab artificio nostrae methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.

Unicum in parabole, si lubet, primariam et Apollonianam adjiciemus exemplum, cujus exemplo reliquae omnes, in quibuscumque in infinitum parabolis, demonstrationes expedientur.

Sit semiparabole primaria AGRC (fig. 13), cujus diameter CB, semibasis AB; sumptis autem applicatis IE, ON, GM etc., sit semper

$$\text{ut quadratum AB ad quadratum IE, ita recta BC ad CE,}$$

et

$$\text{ut quadratum IE ad quadratum ON, ita recta CE ad CN,}$$

et sic in infinitum ex proprietate specifica parabolae Apolloniana.

Intelligentur, ex more methodi, rectae BC, EC, NC, MC, HC, etc. in infinitum continue proportionales: erunt etiam, ut superius probatum est, proportionalia parallelogramma AE, IN, OM, GH, etc. in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN, recurrendum ex methodo ad compositionem proportionum.

Componitur autem

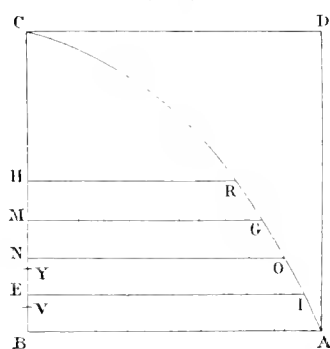
ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN
ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN.

Quum autem sit

ut AB quadratum ad IE quadratum, ita BC ad CE,

si inter BC et CE sumatur media proportionalis CV, item inter EC et

Fig. 113.



NC media proportionalis VC, erunt continue proportionales rectæ BC,
VC, EC, VC, NC et

ut BC ad EC, ita erit BC quadratum ad VC quadratum

sed

ut BC ad EC, ita quadratum AB ad quadratum EI :

ergo

ut AB quadratum ad EI quadratum,

ita erit BC quadratum ad VC quadratum.

et

ut AB ad IE, ita erit BC ad VC.

Ratio igitur parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN compone-
tur

ex ratione BC ad VC, sive VC ad CE, sive EC ad VC,

et ex ratione BE ad EN, sive, ex superius demonstratis ⁽¹⁾, BC ad CE.

⁽¹⁾ Voir plus haut la démonstration pour les hyperboles.

ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus,

$$BC \text{ nempe ad } CE, \text{ et } CE \text{ ad } CY$$

est eadem quæ ratio BC ad CY : igitur

$$\text{parallelogrammum } AE \text{ est ad parallelogrammum } IX \text{ ut } BC \text{ ad } YC,$$

ideoque, ex theoremate methodi constitutivo,

$$\text{parallelogrammum } AE \text{ erit ad figuram } IRCIE \text{ ut recta } BY \text{ ad rectam } YC,$$

ideoque

$$\text{ut idem parallelogrammum } AE \text{ ad totam figuram } AIGRCB,$$

$$\text{ita recta } BY \text{ ad totam diametrum } BC.$$

Ut autem BY ad totam diametrum BC , ita, sumptâ communi latitudine AB ,

$$\text{parallelogrammum sub } AB \text{ in } BY \text{ ad parallelogrammum sub } AB \text{ in } BC,$$

sive parallelogrammum BD (ductâ AD , diametro parallelâ, occurrente tangenti CD in D) : ergo

$$\text{ut parallelogrammum } AE \text{ ad totam figuram semiparabolicam } ARCB,$$

$$\text{ita parallelogrammum sub } AB \text{ in } BY \text{ ad parallelogrammum } BD,$$

et, vicissim,

$$\text{ut parallelogrammum } AE \text{ ad parallelogrammum sub } AB \text{ in } BY,$$

$$\text{ita figura ad parallelogrammum } BD.$$

Ut autem

$$\text{parallelogrammum } AE \text{ ad parallelogrammum sub } AB \text{ in } BY,$$

ita, propter communem latitudinem,

$$\text{recta } BE \text{ ad } BY;$$

ergo

$$\text{ut } BE \text{ ad } BY, \quad \text{ita figura ad parallelogrammum } \langle BD \rangle.$$

et, convertendo,

$$\text{ut } BY \text{ ad } BE, \quad \text{ita parallelogrammum } BD \text{ ad figuram } ARCB.$$

Est autem BY ad BE (propter adæqualitatem et sectiones minutissimas, quod rectas BV, VE, EY, intervalla proportionalium representantes, fere inter se supponit æquales) ut 3 ad 2 : ergo

parallelogrammum BD ad figuram est ut 3 ad 2,

quæ ratio congruit $\pi\epsilon\tau\rho\zeta\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\phi$ paraboles Archimedeo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit usurpata; methodum autem variare et diversam ab Archimede viam sectari necessum habuimus, quia sterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehensam iri, insistendo vestigiis tanti viri, non dubitamus.

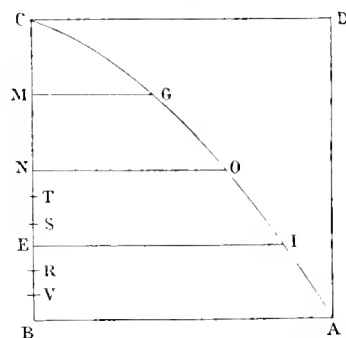
Demonstratio autem et regulæ generales ex nostra methodo fere in omnibus omnino parabolis statim patebunt : sit enim, ut nullus amplius supersit dubitandi locus, parabole ea de qua mentionem fecit *Dissertatio nostra de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* ⁽¹⁾, curva AIGC (fig. 144), ejus basis AB, diameter BC, et sit

ut cubus applicatæ AB ad cubum applicatæ AE,

ita quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ EC,

et reliqua ponantur ut supra, series nempe proportionalium rectarum

Fig. 144.



BC, EC, NC, MC, etc., item series proportionalium parallelogrammorum AE, IN, OM, etc. in infinitum.

⁽¹⁾ Voir plus haut, page 217, ligne 1.

Inter BC et EC sumantur duæ mediæ proportionales VC, RC; item inter EC et CN sumantur etiam duæ mediæ proportionales SC, TC.

Constat, ex constructione, quum

ratio BC ad CE sit eadem rationi EC ad NC,

fore quoque continue proportionales rectas BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC. Est autem

ut AB cubus ad cubum IE, — ita BC quadratum ad EC quadratum,
sive recta BC ad rectam NC;

quum autem sint, ut supra probavimus, septem continue proportionales, BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC, ergo prima, tertia, quinta et septima erunt etiam continue proportionales, ideoque erit

BC ad RC — ut RC ad SC — et — ut SC ad NC :

ut igitur

prima BC ad quartam NC, — ita cubus primæ BC ad cubum secundæ RC.

Sed

ut BC ad NC, — ita probavimus esse cubum AB ad cubum IE :

ergo

ut cubus AB ad cubum IE, — ita cubus BC ad cubum RC,

ideoque

ut AB ad IE, — ita BC ad RC.

Quum igitur ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum EN componatur

ex ratione AB ad IE — et — ex ratione BE ad EN, sive BC ad EC,

ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur

ex ratione BC ad RC — et — BC ad EC.

Ut autem

BC, prima proportionalium, ad EC quartam,
ita RC tertia — ad TC sextam :

ergo parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ratio componitur

ex ratione BC ad RC et RC ad TC,

hoc est

parallelogrammum AE est ad parallelogrammum IN ut BC ad TC.

Parallelogrammum igitur AE, ex prædemonstratis, est ad figuram IGCE

ut recta BT ad TC,

ideoque

ut parallelogrammum AE ad totam figuram AICB,

ita recta BT ad rectam BC,

sive, sumpta communi latitudine AB,

ita parallelogrammum sub AB in BT ad parallelogrammum sub AB in BC;

et, vicissim et convertendo,

parallelogrammum BD est ad figuram AICB

ut parallelogrammum sub AB in BT ad parallelogrammum sub AB in BE,

sive, propter communem latitudinem AB,

ut recta BT ad rectam BE.

Recta autem BT continet quinque intervalla : TS, SE, ER, RV, VB, quæ inter se, propter nostram methodum logarithmicam, censentur aequalia; recta autem BE continet tria ex iis intervallis, nempe ER, RV, VB : ergo

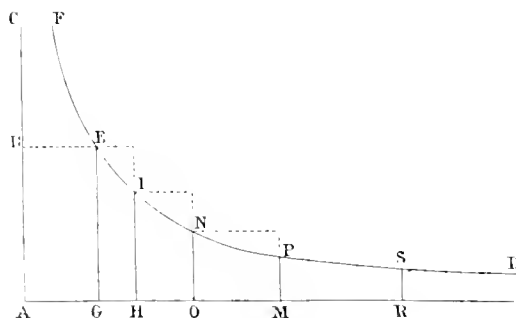
parallelogrammum BD est ad totam figuram in hoc casu ut 5 ad 3.

CANON vero *universalis* inde nullo negotio elicietur : *patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatae et diametri ad exponentem potestatis applicatae* : ut in hoc exemplo videre est, in quo potestas applicata AB est cubus, cujus exponent 3; potestas autem diametri est quadratum, cujus exponent 2 : ergo debet esse, ut jam demonstravimus et per-

petuo constabit, ut summa 3 et 2, hoc est 5, ad 3 exponentem applicatæ.

In *hyperbolis* autem canon non minori facilitate inveniatur universalis : erit enim semper in quacumque hyperbole, si recurras ad primam figuram (*fig. 142*), *parallelogrammum BG ad figuram in infinitum protensam BGED ut differentia exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ.*

Fig. 142.



Sit enim, exempli gratia,

ut cubus HA ad cubum GA, ita quadratum GE ad quadratum HI.

Differentia exponentium cubi et quadrati (hæc est 3 et 2) erit 1; exponens autem potestatis applicatæ, hoc est quadrati, est 2 : ergo, in hoc casu, parallelogrammum erit ad figuram ut 1 ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis et tangentes tam hyperbolarum quam parabolarum, inventio dudum, ex nostra *Methodo de maximis et minimis* derivata, geometris recentioribus innotuit, hoc est ante viginti, plus minus, annos ⁽¹⁾; quod celebrioribus totius Gallie mathematici non gravabuntur fortasse exteris indicare, ne hac de re in posterum dubitent.

Ex supradictis mirum quantum opus tetragonismicum consequatur accessionem : infinite enim exinde figure, curvis contentæ de quibus

(1) Voir plus haut, page 171, note 1.

nihil adhuc nec veteribus nec novis geometris in mentem venit, facillimam sortiuntur quadraturam; quod in quasdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva cujus proprietas det æquationem sequentem :

$$Bq. - Aq. = \text{æquale} = Eq.$$

(apparet autem statim hanc curvam esse circulum); certum est potestatem ignotam, $Eq.$, posse reduci, per applicationem seu parabolismum, ad latus.

Possumus enim supponere

$$Eq. = \text{æquari} = B \text{ in } U,$$

quum sit liberum quantitatem ignotam U , in notam B ductam, æquare quadrato E etiam ignota.

Hoc posito,

$$Bq. - Aq. = \text{æquabitur} = B \text{ in } U;$$

homogeneum autem $B \text{ in } U$ ex tot quantitibus homogeneis componi potest quot sunt in parte æquationis correlativæ; iisdemque signis hujusmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur

$$B \text{ in } U = \text{æquari} = B \text{ in } I + B \text{ in } F;$$

ex more enim Vietæ, vocales semper pro quantitibus ignotis sumimus; ergo

$$Bq. - Aq. = \text{æquatur} = B \text{ in } I + B \text{ in } F.$$

Æquentur singula membra partis unius singulis membris partis alterius : sit nempe

$$Bq. = \text{æquale} = B \text{ in } I;$$

ergo dabitur

$$I = \text{æqualis} = B.$$

Æquetur deinde

$$- Aq. = - B \text{ in } F,$$

hoc est

$$Aq. = B \text{ in } F;$$

erit extremum punctum rectæ Y ad parabolē primariā. Omnia igitur in hoc casu ad quadratum reduci possunt, ideoque, si omnia *E quadrata* ad rectam lineam datam applies, fiet solidum rectilineum datum et cognitum ⁽¹⁾.

Proponatur deinde curva cujus hæc sit æquatio :

$$Ac. + B \text{ in } Aq. = \text{æqualis} = Ec.$$

$Ec.$ applicetur ad planum datum et sit, verbi gratia, æqualis $Bq.$ in U . Quia autem recta U ex pluribus quantitibus ignotis componi potest, sit

$$Ac. + B \text{ in } Aq. = \text{æqualis} = Bq. \text{ in } U + Bq. \text{ in } V.$$

Sequentur singula inter se membra, hoc est

$$Ac. = \text{æquetur} = Bq. \text{ in } U;$$

oriatur inde parabole sub cubo et latere.

Sequetur deinde

$$B \text{ in } Aq. = \text{secundo membro} = Bq. \text{ in } V;$$

oriatur inde parabole sub quadrato et latere, hoc est primaria.

Quadrantur autem singulæ ex his parabolis; ergo aggregatum *Ecuborum* ad rectam datam applicatorum producit planoplanum quantitibus ejusdem gradus rectilineis commode æquandum.

Si sint plura in æquationibus membra, imo et sub plerisque utriusque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eandem ut plurimum methodum, reductionum legitimarum ope, poterunt aptari.

Ex his patet, si in priori æquatione, in qua

$$Bq. = Aq. = \text{æquavimus} = Ec.,$$

(1) C'est-à-dire que, si l'on a

$$c^2 = b^2 - a^2,$$

et que b , par exemple, soit la *recta linea data*, $\int_0^b c^2 da$ est une quantité (du troisième degré) que l'on sait déterminer. C'est dans le même sens qu'il faut interpréter les expressions analogues qui suivent.

loco ipsius $Eq.$, ponamus B in U , posse nos aggregatum omnium U , ad rectam datam applicatarum, considerare tanquam planum et quadrare : omnes enim U nihil aliud sunt quam omnia $Equadrata$ divisa per B rectam datam.

Item, in secunda æquatione, omnes U nihil aliud sunt quam omnes $Ecubi$ divisi per $B quadratum$ datum.

Igitur, tam in prima quam in secunda figura, omnes U faciunt figuram æqualem spatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per syneresim et expeditur, ut patet, per parabolas : sed non minus quadrationum ferax est opus per diaeresim, quod per hyperbolas, aut solas aut parabolis mixtas, commode pariter expeditur.

Proponatur, si placeat, curva ab æquatione sequenti oriunda :

$$\frac{Bcc. + Bqc. \text{ in } I + Acc.}{Uqq.} \text{ aequalis } Eq.$$

Ex jam suppositis $Eq.$ potest fingi æquale B in U , sive, ut tria line et inde membra sint in utraque parte æquationis,

$$B \text{ in } U \text{ potest æquari } B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } F.$$

Quo peracto,

$$\frac{Bcc. + Bqc. \text{ in } I + Acc.}{Uqq.} \text{ æquabitur } B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } F.$$

et, æquando singula membra singulis,

$$\frac{Bcc.}{Uqq.} \text{ æquabitur } B \text{ in } O;$$

et, omnibus in $Aqq.$ ductis,

$$Bcc. \text{ æquabitur } Uqq. \text{ in } B \text{ in } O;$$

et, omnibus abs B divisis,

$$Bqc. \text{ æquabitur } Uqq. \text{ in } O,$$

quæ est æquatio ad unam ex hyperbolis, ut patet : æquationes enim

hyperbolarum constitutivæ continent, ex una parte, quantitatem datam: ex alia vero, id quod fit sub potestatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat

$$\frac{Bqc. \text{ in } A}{Aq.} \quad \text{sive} \quad \frac{Bqc.}{Ac.} \quad \text{æqualis} \quad B \text{ in } I,$$

et, omnibus in $Ac.$ ductis et abs B divisis, fit

$$Bq. \quad \text{æquale} \quad Ac. \text{ in } I,$$

quæ est æquatio alterius hyperboles a priorè diversæ.

Denique tertium membrum est

$$\frac{Aec.}{Aq.}, \quad \text{hoc est} \quad Aq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } I,$$

quæ est æquatio ad parabolam.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes U ad rectam datam applicatas æquari spatio rectilineo dato: summa enim duarum hyperbolarum quadrationi obnoxiarum et unius paraboles dat spatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus singula membra numeratoris separatim denominatori applicemus, ut jam factum est: eodem enim res recidit quo si integram numeratorem ex tribus membris compositum eidem denominatori semel applicemus. Ita enim singula æquationis membra singulis homogenei correlati possunt commode comparari.

Proponatur etiam

$$\frac{Bqc. \text{ in } A - Bec.}{Ac.} \quad \text{æquari} \quad Ec.$$

Fingatur $Ec.$ æquari $Bq. \text{ in } U$, sive, propter duo membra homogenei correlati,

$$Bq. \text{ in } I = Bq. \text{ in } U.$$

Fiet

$$\frac{Bqc. \text{ in } A}{Ac.} \quad \text{sive} \quad \frac{Bqc.}{Aq.} \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } I.$$

et, omnibus in Aq , ductis et abs Bq , divisis, fiet

$$Bc, \quad \text{æqualis} \quad Aq, \text{ in } I,$$

quæ est æquatio ad unam ex hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde secundum homogenei membrum

$$\frac{Bcc.}{Ac.} \quad \text{æquari} \quad Bq, \text{ in } V.$$

Igitur, omnibus in Ac , ductis et abs Bq , divisis, fiet

$$Bqq, \quad \text{æquate} \quad Ac, \text{ in } V,$$

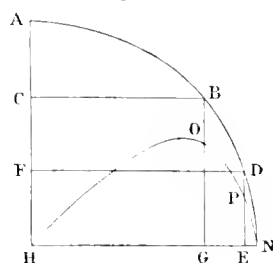
quæ est æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiiis constitutiva.

Datur igitur, recurrendo ad primam æquationem, in rectilineis summa omnium *E cuborum* in hac specie ad certam rectam datam applicatorum.

SED et ulterius progredi et opus tetragonismicum promovere nihil vetat ⁽¹⁾.

Sit in quarta figura (fig. 145) curva qualibet ABDN, cujus basis HN,

Fig. 145.



diameter HA, applicatæ ad diametrum CB, FD, et applicatæ ad basim BG, DE; et decrescant semper applicatæ a base ad verticem, ut hic HN est major FD et FD major est CB et sic semper.

⁽¹⁾ Ce qui suit correspond à l'enseignement de l'intégration par parties et de l'intégration par changement de variable.

Figura composita ex quadratis HN, FD, CB ad rectam AH applicatis (hoc est solidum sub CB quadrato in CA et sub FD quadrato in FC et sub HN quadrato in HF) aequalis est semper figuræ sub rectangulis BG in GH, DE in EH, bis sumptis et ad basim HN applicatis (hoc est solido sub BG in GH bis in GH et sub DE in EH bis in EG) etc. utrimque in infinitum.

In reliquis autem in infinitum potestatibus, eadem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum ad homogenea ad basim. Quæ observatio curvarum infinitarum haecenus ignotarum detegit quadrationem.

Omnes enim cubi HN, FD, CB, ad rectam AH similiter applicati, aequales sunt aggregato productorum ex BG in GH quadratum et ex DE in EH quadratum, ad rectam HN, similiter ut supra, applicatorum et ter sumptorum : hoc est planoplanum sub CB cubo in CA et sub DF cubo in FC et sub HN cubo in HF æquatur summæ planoplanorum ex BG in GH quadratum in HG et ex DE in EH quadratum in EG, ter sumptæ.

Aggregatum vero quadratoquadratorum HN, FD, CB ad rectam AH applicatorum æquatur quadruplo summæ planoplanorum sub BG in GH cubum et sub DE in EH cubum, ad rectam HN, similiter ut supra, applicatorum.

Inde emanant infinite, ut statim patebit, quadraturæ.

Esto enim, si placet, curva illa ABDN ejus naturæ ut, data base HN et diametro HA, diameter data AH vocetur in terminis analyticis *B*, ipsa verò HN, basis data, vocetur *D*, quælibet applicata FD vocetur *E* et quælibet HF vocetur *A*; et sit, verbi gratia, æquatio curvæ constitutiva

$$Bq. = 4q. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

quod in circulo ita se habet.

Quum ergo, ex prædicto theoremate universalis, omnia *E quadrata* ad rectam *B* applicata sint æqualia omnibus productis ex HG in GB \leq bis sumptis et \geq ad basim HN sive ad *D* applicatis; sint autem

omnia E quadrata, ad B applicata, æqualia [spatio] ⁽¹⁾ rectilineo dato, ut superius probatum est : ergo omnia producta ex HG in GB, bis sumpta et ad basim D applicata, continent [spatium] rectilineum datum. Ergo, sumendo dimidium, omnia producta ex HG in GB ad basim D applicata erunt æqualia [spatio] rectilineo dato.

Ut autem facillima et nullis asymmetriis involuta fiat translatio prioris curvæ ad novam, ita constanti artificio, quæ est nostra methodus, operari debemus.

Sit quodlibet ex productis ad basim applicandis, HE in ED. Quum igitur FD sive HE, ipsi parallela, vocetur in analysi E , et FH sive DE, ipsi parallela, vocetur A , ergo productum sub HE in ED vocabitur E in A . Ponatur illud productum E in A , quod sub duabus ignotis et indefinitis rectis comprehenditur, æquari B in U , sive producto ex B data in U ignotam, et intelligatur EP, in directum ipsi DE posita, æquari U . Ergo

$$\frac{B \text{ in } U}{E} \quad \text{æquabitur} \quad A.$$

Quum autem $Bq. - Aq.$ æquetur, ex proprietate specifica prioris curvæ, ipsi $Eq.$, ergo subrogando, in locum A , ipsius novum valorem

$$\frac{B \text{ in } U}{E},$$

fiet

$$Bq. \text{ in } Eq. - Bq. \text{ in } Uq. \quad \text{æquale} \quad Eqq.,$$

sive, per antithesim,

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.,$$

quæ est æquatio novæ HOPN curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in qua, quum omnia producta ex B in U dentur, ut jam probatum est, si omnia ad B applicentur, dabitur summa omnium U ad basim applicatarum, hoc est, dabitur planum HOPN < in > rectilineis, ideoque ipsius quadratura.

(1) Il faudrait *solido*. Le mot *spatio* a pu être écrit par inadvertance ou ajouté a tort sur l'original. De même pour les répétitions *spatium* et *spatio* qui suivent.

Sit, secundi exempli gratia, æquatio prioris curvæ constitutiva

$$B \text{ in } Uq. = Ec. \quad \text{æquale} \quad Ec.$$

Summa omnium *E cuborum* ad diametrum *B* applicatorum dabitur, ideoque summa omnium productorum ex quadratis *HE* in *ED* ad basim applicatorum. Productum autem ex *HE* quadrato in *ED* fit, in terminis analyticis, *Eq. in A*, quod fingatur æquari *Bq. in U*, et recta *EP*, ut supra, æquatur *U*. Ergo

$$\frac{Bq. \text{ in } U}{Eq.} \quad \text{æquabitur} \quad A.$$

Si igitur, in locum *A*, subrogemus jam agnitum illius valorem

$$\frac{Bq. \text{ in } U}{Eq.},$$

et omnia juxta Analyseos præcepta exsequamur, fiet

$$Bqc. \text{ in } Uq. \text{ in } Eq. \quad \text{Eccc.} \quad \text{æquale} \quad Bcc. \text{ in } Ue.,$$

quæ est æquatio novæ *HOPN* curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in qua, quum omnia producta *Bq. in U* ad basim *D* applicata dentur, omnibus per *Bq.* datum divisus, dabitur summa omnium *U* ad basim *D* applicatarum, ideoque quadratura figuræ *HOPN*.

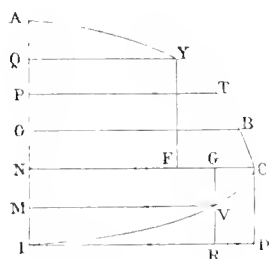
Et est generalis, ad omnes omnino casus extendenda in infinitum, methodus. Notandum porro et accurate advertendum in translationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum versus basim decrescunt, aliam omnino viam analystis incundam, a præcedenti diversam.

Sit enim in quinta figura (*fig. 146*) prior curva *IVCBFYA*, cujus diameter *AI*, applicatæ *MV*, *NC*, *OB*, *PT*, *QY*, et ejus curvæ ea sit natura ut applicatæ versus basim semper decrescant, donec ad basim perveniant, ita ut *MV* sit minor quam *NC*; rursus autem ita curva versus *A*, per tramitem *CBYA*, inflectatur, ut *CN* sit major quam *BO*, *BO* major quam *PT*, *PT* major quam *QY*, etc.; ita ut omnium applicatarum maxima sit *CN*.

Si in hoc casu queramus translationem quadratorum *MV*, *NC* ad

basim, ea non comparabimus productis sub IR in RV, ut supra, quia jam, ex theoremate generali, suppositum est omnia quadrata MV, NC æquari productis sub VG in GN, quum CN, maxima applicatarum, possit et debeat considerari ut basis respectu curvæ ejus vertex I.

Fig. 146.



Quadrata igitur MV, NC, in curva quarum applicatæ decrescunt versus basim, comparabuntur in hoc casu productis $< \text{ex} >$ GV in GN, hoc est, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, si MI vel RV vocetur A , et ipsa MV sive RI vocetur E , ipsaque CD sive GR (quæ ductæ, per terminum maximæ applicatarum, ipsi diametro parallele, est æqualis ideoque facile ex nostris methodis invenienda) rectæ datæ Z æqualis supponatur, fiet

$$\text{productum ex GV in GN} = \text{aquale} = \text{producto ex } Z \text{ in } E = A \text{ in } E,$$

ideoque omnia quadrata MV, NC, usque ad maximam applicatam, comparabuntur productis

$$Z \text{ in } E = A \text{ in } E$$

ad basim ID applicandis.

Reliqua vero quadrata CN, BO, PT comparabuntur productis ex YF in FN, quæ in terminis analyticis æquivalent

$$A \text{ in } E = Z \text{ in } E.$$

Quibus ita stabilitis, facillime ex priore curva nova versus basim derivabitur, idemque in aliis omnino applicatarum potestatibus erit observandum.

Ut autem pateat novas ex nostra hac methodo emergere quadraturas,

Si enim in quarta figura (fig. 145) supponatur æquatio curvæ constitutiva, ut superius diximus,

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

non solum ex ea derivabitur nova curva ad basim, cujus æquatio est

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.,$$

sed etiam nova curva ad diametrum, æquando potestatem applicatæ, quæ est $Eq.$, producto $B \text{ in } U$.

Dabuntur enim omnia producta $B \text{ in } U$ ad diametrum applicata et, omnibus per B divisis, dabuntur omnes U diametro applicatæ, ideoque quadratura curvæ novæ ex priore versus diametrum oriundæ, cujus æquatio erit

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } U;$$

unde statim apparet novam illam curvam versus diametrum esse parabolam.

Hujusmodi autem transmutationum beneficio, non solum ex prioribus curvis oriuntur novæ, sed itur, nullo negotio, a parabolis ad hyperbolas et ab hyperbolis ad parabolas, ut experientiâ constabit.

Sicut autem a curvis, in quibus dantur potestates applicatarum, fit, precedentis ope analyseos, translatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur, ita ex curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facile ad curvas, in quibus potestates applicatarum dantur.

Cujus rei exemplum esto curva, cujus æquatio

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.$$

In hac enim æquatione, ut jam probatum est, dantur omnes U . Ponatur

$$U \quad \text{æqualis esse} \quad -\frac{A \text{ in } E}{B},$$

et, subrogando in locum ipsius U , novum ipsi assignatum valorem, $-\frac{A \text{ in } E}{B}$, fiet

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Aq. \text{ in } Eq.$$

et, omnibus abs $Eq.$ divisiss, remanebit

$$Bq. - Eq. = aq. = 1q.$$

sive

$$Bq. - 1q. = aq. = Eq.$$

Dabuntur igitur in hac nova curva, quam apparet esse circulum, omnia E quadrata.

Quod si, ex prima curva in qua dantur latera applicatarum, quaeratur nova in qua dentur cubi applicatarum, eadem methodo utendum, modo potestates ignotarum conditionarias usurpemus.

Proponatur enim curva quam superius ex alia deduximus, et sit illius æquatio

$$Bqc. \text{ in } Uq. \text{ in } Eq. = Ecc. = aqualis = Bcc. \text{ in } Uc.$$

Probatum est in illa dari aggregatum omnium U , hoc est, latera applicatarum. Ut itaque ex eâ nova curva derivetur, in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur

$$U = \text{aquari} = \frac{Eq. \text{ in } 1}{Bq.},$$

et in locum U substituatur novus iste quem ipsi assignavimus valor, fiet tandem, operando secundum præcepta artis, æquatio

$$\text{inter } B \text{ in } 1q. - 1c. \text{ et } Ec.,$$

quæ dabit curvam in qua omnes $Ec.$, cubos applicatarum repræsentantes, dabuntur.

Ex hac autem methodo non solum dantur et inveniuntur quadrationes infinitæ, nondum geometricis cognitæ, sed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadrature, supponendo simpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperboles, ut aliarum, expediuntur.

Exempli gratia, in æquatione circuli, in qua

$$Bq. - 1q. = \text{aquatur} = Eq.,$$

dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum potestates, quarum exponentes signantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadratoquadrata, omnes cubocubi, etc.; sed potestates applicatarum, qua-

rum exponentes signantur numero impari, ut omnes *E cubi*, omnes *E quadratocubi*, dantur tantum in rectilineis, supponendo ipsam circuli quadraturam. Quod non est operosum demonstrare et in praxin redigere, tanquam corollarium methodi præcedentis.

Plerumque autem usuenit ut iterandæ vel bis vel etiam sæpius sint operationes ad inquirendam curvæ propositæ dimensionem.

Proponatur, exempli gratia, curva cujus æquatio sequens speciem determinet :

$$Bc. = \text{æqualis} \quad Aq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } E.$$

Si dantur omnes *E*, ergo dantur omnia sub recta data (*B* videlicet) in *E* rectangula. Rectangulum *B in E*, invertendo superiorem, de qua egimus in principio Dissertationis, methodum, æquetur quadrato, *Oq*. Ergo

$$\frac{Oq.}{B} = \text{æquabitur} \quad E$$

et, substituendo, in locum *E*, novum hunc ipsi assignatum valorem, fiet

$$Bqq. = \text{æquale} \quad Aq. \text{ in } Oq. + Bq. \text{ in } Oq.$$

Et hæc sit prima operatio, quæ est inversa ejus quam initio hujus Dissertationis præmisimus, et quæ novam curvam exprimit, in qua inquirendum restat an dentur omnia *Oq*. Recurrendum igitur ad secundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquiremus.

Ponatur $\frac{B \text{ in } U}{O}$, ex superiore quam secundo loco exhibuimus methodo, æquari *A* et, substituendo, in locum *A*, ipsi jam assignatum ex nostra methodo valorem, fiet

$$Bqq. - Bq. \text{ in } Oq. = \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.$$

et, omnibus per *Bq*. divisio, evadet tandem

$$Bq. - Oq. = \text{æquale} \quad Uq.,$$

quæ æquatio dat circulum, et in ea omnes *U* dantur, supponendo quadraturam circuli.

Recurrento igitur ad priorem curvam, in qua

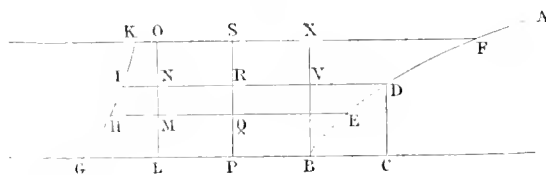
$$Bc. \quad \text{ponitur aequari} \quad Cq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } E,$$

patet spatium ab ea curva oriundum per quadraturam circuli posse quadrari, idque per duas curvas a priore diversas analysis nostra breviter et facile expedit.

Hæc vero omnia et ad inventionem rectarum curvis æqualium et ad pleraque alia non satis hæcenus indagata problemata inservire statim experiendo ἀγχιονος analysta deprehendet.

Sit in sexta figura (Fig. 148) parabola primaria ADB, cujus axis CB,

Fig. 148.



applicata CD æqualis axi CB et recto lateri BV, fiantque BP, PL, LG singulæ æquales axi CB et ipsi in directum. Sumatur in curva quodvis punctum, ut F, et, datis infinitis BX, PS, LO ipsi CD parallelis, ducatur FXSOK parallela axi, occurrens rectis $\angle BX$, PS, LO in punctis $\angle X$, S et O; et fiat ut summa rectarum FX, XS sive

$$\text{ut tota FS ad SO,} \quad \text{ita SO ad OK;}$$

et, sumptis similiter punctis D, E, fiat

$$\text{ut DR ad RN,} \quad \text{ita RN ad NI,}$$

et

$$\text{ut EQ ad QM,} \quad \text{ita QM ad MH;}$$

et intelligatur curva infinita per puncta G, H, I, K etc. incedens, ejus asymptotos erit recta infinita LO.

Curva hæc GHK est ea cujus species a superiori æquatione determinatur, in qua

$$Bc. \quad \text{æquatur} \quad Cq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } E.$$

Aio itaque, ex jam tradita operationum analytica iteratione, spatium KIHGLMNO, in infinitum versus puncta K, O extendendum, aequale esse circulo, cujus diameter est axis BC, < bis sumpto >.

Hanc vero questionem, ab erudito geometra nobis propositam, ita statim expeditimus : eadem methodo spatium a Dioclea comprehensum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus ⁽¹⁾.

Sed elegans imprimis operationum iteratio evadit, quum ab altioribus applicatarum potestatibus ad depressiores, vel contra a depressioribus ad altiores, analysis ipsa transeurrit : cui methodo praesertim debeatur inquisitio summae applicatarum in quacumque curvâ propositâ, et multa alia problemata tetragonismica.

Proponatur, verbi gratia, curva cujus aequatio

$$Bq. - Aq. = \text{aequale} \quad Eq.,$$

quam statim apparet esse circulum. Quæritur summa cuborum applicatarum, hoc est, summa *E cuborum*.

Si dantur omnes *E cubi*, ergo, per praecedentes secundum potestatis conditionem methodos, ex ea curva potest alia ad basim derivari, in qua dabitur summa applicatarum. Ponatur igitur ex methodo

$$\frac{Bq. \text{ in } O}{Eq.} = \text{aequari} \quad 1 :$$

ergo, substituendo, in locum 1, jam assignatum ipsi valorem, fiet ex methodo

$$Bq. \text{ in } Eqq. - Ecc. = \text{aequate} \quad Bqq. \text{ in } Oq.,$$

quæ est aequatio curvæ, in qua omnes *O* dantur ex suppositione quam fecimus, in prima curva dari omnes *E cubos*.

Quum igitur in hac nova curva omnes *O* dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quaerantur quadrata applicatarum, non vero cubi, ut in priore curva jam suppositum est. Fingatur igitur ex nostra, quæ in

⁽¹⁾ Voir le fragment qui suit le présent Traité. Quant à la question qui précède, on ignore quel géomètre l'a proposée à Fermat.

quadratis, ut jam supra diximus, usurpatur, methodo,

$$\frac{E \text{ in } U}{B} \quad \text{æquari} \quad O;$$

ergo

$$Bq, \text{ in } Eqq, - Ecc, \quad \text{æquabitur} \quad Bq, \text{ in } Eq, \text{ in } Uq,$$

et, omnibus abs Eq , divisis, fiet

$$Bq, \text{ in } Eq, - Eqq, \quad \text{æquale} \quad Bq, \text{ in } Uq;$$

et in hac curva omnia E quadrata dantur.

Si igitur ex hac curva queramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, si placet,

$$Eq, \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } F;$$

ergo, in ultima hac æquatione,

$$B \text{ in } F - Fq, \quad \text{æquabitur} \quad Uq,$$

et, quum in superiore dentur omnia E quadrata, dabuntur in ista omnia rectangula $B \text{ in } F$, ideoque omnes F .

Quum ergo omnes F dentur in hac ultima curva, quæ est circulus, ut patet (igitur eâ tantum conditione dantur, si supponas dari circuli quadraturam), regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua desinit nostra analysis, curvâ ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, supponendo circuli quadraturam.

Idem de quadratoeubis, de quadratoquadratoeubis et cæteris in infinitum gradibus imparis potestatibus demonstrare est in promptu; sed multiplicatur numerus curvarum, prout altior est, de qua inquiremus, potestas.

Nec est difficilis ab analysi ad synthesin et ad verum quadrandæ figuræ calculum regressus.

Sæpius autem contingit et miraculi instar est per plurimas numero curvas incedendum et exspatiandum esse analystæ, ut ad simplicem æquationis localis propositæ dimensionem perveniatur.

Proponatur, exempli causa ⁽¹⁾,

$$\frac{B^2 \text{ in } t - B^3}{t^6} = \text{æquari} = Eq.,$$

Quum supponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ, dabuntur omnes *A*, ergo omnia *B in A*, quæ si æques quadrato ignoto, *Oq.*, dabuntur omnia *Oq.*, et

$$t = \text{æquabitur} = \frac{Oq.}{B},$$

ideoque fiet æquatio

$$\text{inter } \frac{B^{12} \text{ in } Oq. - B^{13}}{O^{12}} = \text{et} = Eq.$$

Ex hac nova curva, aliâ methodo de qua toties egimus, deducetur tertia in qua, quia dantur omnia *O quadrata*, ponatur

$$\frac{B \text{ in } U}{O} = \text{æquari} = E;$$

ergo fiet æquatio

$$\text{inter } \frac{B^{10} \text{ in } Oq. - B^{12}}{O^{10}} = \text{et} = Uq.,$$

unde deducetur tertia curva ⁽²⁾, in qua dabuntur omnes *O*, ideoque omnes *U*.

Si dantur omnes *U*, ergo ex prima methodo dantur omnia sub *B in U* rectangula. Sit

$$B \text{ in } U = \text{æquale} = Fq.,$$

⁽¹⁾ Pour ce qui suit, jusqu'à la fin du Traité, on a reproduit la notation exponentielle telle qu'elle se trouve dans les *Varia*, où d'ailleurs elle n'apparaît pas plus tôt. Il est cependant douteux que Fermat, après avoir affecté jusque-là de conserver la notation de Viète, l'ait abandonnée sans faire une remarque analogue à celle qu'il a inscrite dans un Traité de la même époque (voir plus haut, p. 127, lignes 4 à 6 en remontant) pour une occasion où l'emploi des exposants s'imposait davantage à lui; il est surtout douteux qu'il ait appliqué ici la nouvelle notation aussi systématiquement que l'indiqueraient les *Varia*. En outre, dans cette fin du Traité, on peut soupçonner d'autres remaniements du texte. Voir la note qui suit.

⁽²⁾ Les *Varia*, au lieu de tertia, portent quarta; tous les noms de nombre qui suivent, et qui sont inscrits en italiques dans le texte, sont de même augmentés d'une unité. On peut admettre une inadvertance de Fermat; mais il est également possible que son texte ait été corrigé à tort et même défiguré par l'addition de gloses dont l'auteur aura voulu numérotter successivement les différentes courbes dont il est question.

ideoque

$$\frac{I^3 q.}{B} = \text{aequabitur} = U,$$

et fiet aequatio

$$\text{inter } \frac{B^{12} \text{ in } Oq.}{O^{10}} = \frac{B^{10}}{O^{10}} \text{ et } I^5,$$

unde oriatur *quarta* curva, in qua dabuntur omnia *I quadrata*.

Ex illâ, solitâ methodo, deducatur alia curva et fiat

$$\frac{B \text{ in } I}{I^7} = \text{aequalis} = O.$$

Omnibus secundum praecepta Analyseos peractis, fiet

$$B^5 \text{ in } I^3 \text{ in } Iq. = B^5 \text{ in } I^{10} = \text{aequale} = I^{10},$$

unde oriatur *quinta* curva, in quâ dabuntur omnes *I*, ideoque omnes *I*.

Ex ea, contrariâ quam jam saepius inculcavimus methodo, quaeratur alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, et sit

$$\frac{I \text{ in } I}{B} = \text{aequalis} = I^7$$

(nihil enim vetat defectu vocalium ad priores supra usurpatas recurrere): fiet

$$Bq. \text{ in } I^5 = I^6 = \text{aequale} = Bq \text{ in } I,$$

unde oriatur curva *sexta* in qua omnia *I quadrata* dabuntur.

Reducantur ad latera, notâ et saepius iteratâ superius methodo, et fiat

$$Iq. = \text{aequale} = B \text{ in } E:$$

ergo omnia *B in E* dabuntur et inde deducetur *septima* curva, in qua

$$Bq. \text{ in } I^5 = I^6 = \text{aequabitur} = B^5 \text{ in } Eq.,$$

in eaque dabuntur omnes *E*, ideoque omnes *A*.

Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, et ex methodo ponatur

$$\frac{I \text{ in } O}{B} = \text{aequari} = E:$$

ergo

$$Bq. \text{ in } P - P^6 = \text{æquabitur } Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } Oq.$$

et, omnibus abs $Aq.$ divisis, fiet æquatio

$$\text{inter } Bq. \text{ in } Aq. - P^6 \text{ et } Bq. \text{ in } Oq.,$$

in qua omnia A quadrata dabuntur et erit *octava* curva ab ea æquatione determinata.

Quum igitur in ea omnia A quadrata dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, et sit

$$Aq. = \text{æquale } B \text{ in } U;$$

fiet

$$B \text{ in } U - Uq. = \text{æquale } Oq.,$$

quæ ultima æqualitas dabit *nonam* curvam, in qua omnes U dabuntur.

At hæc ultima curva est circulus, ut patet, et in ea omnes U nondantur, nisi supposita circuli quadratura : ergo recurrendo ad primam curvæ propositæ constitutionem, dabitur illius quadratura, supponendo ipsam ultimæ istius curvæ sive circuli quadraturam. Beneficio igitur *novem* curvarum inter se diversarum ad notitiam prioris pervenimus.

< DE CISSOIDE FRAGMENTUM > ⁽¹⁾.

Esto cissois EAPS (fig. 149) in semicirculo LVABE, cujus centrum H, diameter LE, perpendicularis ad diametrum radius HA, asymptotos infinita cissoidis recta LR ad diametrum perpendicularis.

Aio spatium contentum sub EL, cissoide infinita EAPS et asymptoto

(¹) Fragment publié par M. Ch. Henry (*Pierre de Carcavy etc.*, p. 38-40), d'après le manuscrit de la Bibliothèque de Leyde, fonds Huygens, n° 30. Il suit la lettre de Carcavi à Huygens du 1^{er} janvier 1662, et porte comme titre : *De M. de Carcavy, qui l'avoit de M. de Fermat*, avec la remarque de Huygens : « *J'ay démontré cette Proposition 4 ans auparavant.* » La copie ne paraît pas très fidèle.

gulis rectis ad cissoidem similiter applicatas. Est autem, ex natura cissoidis,

$$\text{ut VI ad IE, ita IE ad IP;}$$

sed IE est æqualis rectis HI et HE sive HV : ergo est

$$\text{ut IV ad summam rectarum HI, HV, ita IE ad IP.}$$

Sed, propter similitudinem triangulorum HVI, VMI, VNO, est

$$\text{ut IV ad summam rectarum HI, HV,}$$

$$\text{ita recta NO ad summam rectarum NV, VO :}$$

ergo

$$\text{ut NO sive KI est ad NV plus VO, ita est recta IE ad rectam IP.}$$

Rectangulum igitur sub IP < in > IK æquatur rectangulo sub IE in NV plus rectangulo sub IE in VO.

Ex alia autem parte, est, ex natura cissoidis,

$$\text{ut BG ad GE, ita GE ad GY :}$$

sed GE est æqualis rectæ HE sive HB minus HG : ergo est

$$\text{ut BG ad BH minus HG, ita GE ad GY.}$$

Ut autem BG ad BH minus HG, ita, propter similitudinem triangulorum, ex jam demonstratis,

$$\text{recta QC sive GF est ad BC minus BQ,}$$

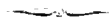
ideoque rectangulum sub YG in GF æquabitur rectangulo sub GE in BC minus rectangulo sub GE in BQ.

Ex constructione autem, quum rectæ HI, HG sint æquales, item rectæ KI, GF, patet reliquas æquari, nempe VN ipsi BC, VO ipsi BQ : unde patet duo rectangula correlativa, sub PI in IK et sub YG in GF sive in eadem IK, æqualia esse rectangulis sub IE in NV, plus GE in BC sive LI in NV, plus IE in VO, minus GE in BQ sive in VO. Rectangula autem duo sub IE in NV et sub LI in NV æquantur unico rectangulo sub diametro LE in NV : rectangulum vero IE in VO minus GE in VO

aequatur rectangulo sub IG in VO sive rectangulo sub HI sive VX in VO bis : ergo summa rectangulorum sub PI in IK et sub GY in eandem IK aequatur rectangulo sub diametro EL in VN et rectangulo sub VX in VO bis.

Rectangula autem omnia sub diametro et portionibus tangentium VN in quadrante circuli LVA ductarum representant rectangulum sub diametro in quadrantem LVA, hoc est duplum semicirculi LAE; rectangula autem omnia sub VX in VO bis sive, ductà OZQ parallelà diametro, rectangula omnia sub VX in XZ bis representant totum semicirculum LAE.

Ergo spatium cissoïdale, quod aequatur duobus illis rectangulorum seriebus, aequatur triplo semicirculi, ut patet.



OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

OBSERVATIONES DOMINI PETRI DE FERMAT.

I (p. 54).

(Ad definitionem VI Cl. Gasparis Bacheti Porismatum Libr. III.)

A duobus quibuscunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, quum ex aggregato et ex intervallo quadratorum ab ipsis et ex duplo plani sub ipsis numeris contenti constant latera trianguli.

A tribus numeris in proportionem arithmetica possumus formare triangulum, si secundum hanc definitionem sextam formemus illud a medio et differentia. Nam solidum sub tribus ductum in differentiam faciet aream dicti trianguli, atque ideo, si differentia sit unitas, solidum sub tribus erit area trianguli.

II (p. 61).

(Ad quæstion. VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticonum Libr. II.)

Propositum quadratum dividere in duos quadratos.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere : ejus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

III (p. 65).

(Ad quæstion. X Libr. II.)

Datum numerum, qui ex duobus componitur quadratis, in alios < duos > quadratos parti.

Num verò numerum ex duobus cubis compositum dividere poterimus in alios duos cubos? Hæc quæstio difficilis sane nec Bacheto aut Vietæ

cognita, fortasse nec ipsi Diophanto: ejus tamen solutionem dedimus infra in notatis (¹) ad quæstionem secundam Libri IV.

IV (p. 107).

(Ad quæstion. X Libr. III.)

Dato aliquo numero, invenire tres alios, ut compositus ex binis quibuscumque adsumpto dato numero faciat quadratum, sed et summa trium dato numero adjecto faciat quadratum.

Quomodo inveniendi sint quatuor numeri ut compositus ex binis quibuscumque adsumpto dato numero conficiat quadratum, invenimus ad propositionem 30 Libri V.

V (p. 108).

(Ad quæstion. XI Libr. III.)

Dato aliquo numero, invenire tres alios, ut compositus ex duobus quibuscumque dempto dato numero faciat quadratum, sed et trium summa detracto dato numero faciat quadratum.

Quæ notavimus ad 31^{am} Libri V, docebunt quomodo inveniendi sint quatuor numeri, quorum bini quilibet sumpti dempto dato numero conficiant quadratum.

VI (p. 108).

(Ad quæstion. XVII Libr. III.)

Invenire tres numeros ut productus ex binorum multiplicatione, adsumptâ eorundem summâ, quadratum faciat.

Exstat hujus quæstionis Diophanti problema (²) in Libro V quæstione 5. Num verò problema sequens ipse Diophantus sciens prætermisit, an potius in aliquo tredecim librorum constructum erat, nescimus :

(1) Voir ci-après l'observation IX.

(2) *Dioph.*, p. 216 : « Invenire tres quadratos, ut quem bini faciunt planum, sive adsciscat amborum summam, sive reliquum, faciat quadratum. »

Invenire tres quadratos ut productus ex binorum multiplicatione, assumptâ eorundem summâ, quadratum faciat.

Hujus tamen quæstionis infinitas solutiones dare possumus. En, verbi gratia, sequentem solutionem : satisfaciunt nempe problemati tres quadrati sequentes

$$\begin{array}{ccc} \frac{3 \ 504 \ 384}{203 \ 401}, & \frac{2 \ 019 \ 241}{203 \ 401}, & 4. \\ \text{Primus quadratus,} & \text{Secundus quadratus,} & \text{Tertius quadratus.} \end{array}$$

Imo et ulterius progredi et Diophanteam quæstionem promovere nihil vetat. Sequens enim problema generaliter et infinitis modis construximus :

Invenire quatuor numeros sub quibus binis quod fit planum, adscitâ amborum summâ, faciat quadratum.

Inveniantur, per 5^{am} propositionem Libri V, tres quadrati ut quem bini faciunt planum adsciscens amborum summam faciat quadratum, et sunt illi numeri quadrati

$$\frac{25}{9}, \quad \frac{64}{9}, \quad \frac{196}{9}.$$

Sunt ergo tres isti quadrati tres primi nostræ quæstionis. Ponatur quartus x ; fiet tria producta unâ cum summis æqualia

$$\begin{array}{ccc} \frac{34}{9}x + \frac{25}{9}, & \frac{73}{9}x + \frac{64}{9}, & \frac{205}{9}x + \frac{196}{9}. \\ \text{Primum,} & \text{Secundum,} & \text{Tertium.} \end{array}$$

Hæc igitur tria æquanda quadrato, et oritur triplicata æqualitas, cujus explicationem dedimus ad quæstionem 24 Libri VI.

VII (p. 127-128).

Ad commentarium (in quæstion. XXII Libr. III), præcipue ad locum illum :

Adverte tertio etc. (1).

Numerus primus, qui superat unitate quaternarii multiplicem, semel

(1) Ce renvoi, indiqué par Samuel Fermat, n'est pas exact ; l'observation de Fermat porte surtout sur la fin du commentaire de Bachet, à partir de « Cæterum animadversione

tantum est hypotenusa trianguli rectanguli, ejus quadratus bis, cubus ter, quadratoquadratus quater, etc. in infinitum.

Idem numerus primus et ipsius quadratus componuntur semel ex duobus quadratis; ejus cubus et quadratoquadratus, bis; quadrato-cubus et cubocubus ter; etc. in infinitum.

Si numerus primus ex duobus quadratis compositus ducatur in alium primum etiam ex duobus compositum quadratis, productum componetur bis ex duobus quadratis; si ducatur in quadratum ejusdem primi, productum componetur ter ex duobus quadratis; si ducatur in cubum ejusdem primi, productum componetur quater ex duobus quadratis; et sic in infinitum.

Hinc facile est determinare *quoties numerus datus sit hypotenusa trianguli rectanguli*.

Sumantur omnes primi, quaternarii multiplicem unitate superantes, qui datum numerum metiuntur : verbi gratia, 5, 13, 17.

Quod si potestates dictorum primorum metiantur datum numerum,

quoque dignum est, etc. (p. 127, l. 7) ». En fait, le problème de Diophante consiste à trouver quatre nombres tels que la somme de leurs carrés, augmentée ou diminuée de chacun de ces nombres, fasse toujours un carré. Dans son commentaire, Bachet remarque :

1^o Comment Diophante ramène ce problème à celui de trouver quatre triangles rectangles en nombres ayant une même hypoténuse;

2^o Comment ce nouveau problème se résout en nombres entiers par le choix de deux triangles rectangles non semblables, et en multipliant les côtés de chacun d'eux par l'hypoténuse de l'autre.

C'est-à-dire que si l'on a

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \text{et} \quad a_1^2 + b_1^2 = c_1^2,$$

on aura

$$(1) \quad \overline{ac_1}^2 = \overline{ac_1}^2 + \overline{bc_1}^2 = \overline{a_1c}^2 + \overline{b_1c}^2.$$

3^o Si d'ailleurs les hypoténuses sont, chacune respectivement, somme de deux carrés, leur produit peut être décomposé en deux carrés de deux manières différentes.

Si l'on a

$$c = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad c_1 = x_1^2 + y_1^2,$$

on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \overline{cc_1} = (x^2 + y^2)(x_1^2 + y_1^2) = (xx_1 - yy_1)^2 + (xy_1 + x_1y)^2 \\ \quad \quad \quad = (xx_1 + yy_1)^2 + (xy_1 - x_1y)^2. \end{cases}$$

Bachet ajoute que, toutefois, les deux carrés composant chaque hypoténuse doivent être positifs, et qu'il ne doit pas y avoir de proportion entre les quatre.

4^o Comme maintenant, si un nombre est décomposé en deux carrés (soit p^2 et q^2), on en

disponantur unà cum reliquis loco laterum : verbi gratia, metiantur datum numerum

5 per cubum, 13 per quadratum, et 17 per latus simpliciter.

Sumantur exponentes omnium divisorum : nempe numeri 5 exponentens est 3 propter cubum ; numeri 13 exponentens est 2 propter quadratum et numeri 17 unitas tantum.

Ordinentur igitur, ut volueris, dicti omnes exponentes : ut, si velis, 3.2.1.

Ducatur primus in secundum bis et producto adjiciendo summam primi et secundi, fit 17. Ducatur jam 17 in tertium bis et producto adjiciendo summam 17 et tertii, fit 52. Datus igitur numerus erit hypotenusa 52 triangulorum rectangulorum ; nec est dissimilis in quotennique divisoribus et ipsorum potestatibus methodus.

Reliqui numeri primi qui quaternarii multiplicem unitate non supe-

dédait qu'il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle en nombres, car

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2.$$

on aura ainsi le moyen de construire deux nouveaux triangles rectangles ayant cc_1 pour hypoténuse, et le problème sera résolu, sous la réserve que les opérations ne seront pas illusoires, comme cela arriverait si, dans la double décomposition (2), on tombait sur une somme de deux carrés égaux : on doit en conséquence exclure le cas où $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x - 3}{x - 3}$.

5° Bachet indique les corrections qu'il a apportées au texte grec.

6° Il montre comment le procédé de Diophante peut être généralisé, en prenant deux nombres sommes de deux plans semblables ; le produit de ces nombres peut en effet, s'il n'y a pas proportion entre les composants, être divisé en deux carrés de quatre manières différentes.

Enfin, il soulève la question que Fermat a complètement résolue dans son observation, à savoir de trouver un nombre décomposable en deux carrés de tant de manières que l'on voudra. Si, dit-il, on multiplie un nombre qui est 1 fois seulement somme de deux carrés par un nombre jouissant de la même propriété, le produit sera somme de deux carrés 2 fois seulement. Un tel nombre, multiplié par un autre décomposable 1 seule fois, donnera un produit décomposable 3 ou 4 fois seulement (3 fois si le multiplicateur a un facteur commun avec le multiplicande, 4 fois dans le cas contraire). Un nombre décomposable 3 fois seulement, multiplié par un qui ne l'est que 1 fois seulement, donnera (en excluant le cas de facteurs communs) un produit décomposable 6 fois seulement.

On peut continuer ainsi indéfiniment : Un nombre décomposable 4 fois et un qui l'est 1 fois, ou bien deux décomposables 2 fois seulement donneront un produit 8 fois décomposable. Un nombre 6 fois décomposable par un 2 fois décomposable donnera un produit 24 fois décomposable. Bachet donne des exemples sans démonstration.

cant, nihil aut addunt quæstioni aut detrahunt neque ipsorum potestates.

Invenire numerum qui quoties quis velit sit hypotenusa.

Quæratnr numerus qui sit septies hypotenusa.

Numerus 7 datus dupletur : fit 14. Adjice unitatem : fit 15. Sume omnes primos qui mensurant 15 : sunt hi 3 et 5. Ab unoquoque demptâ unitate, sume reliqui dimidium : fiunt 1 et 2. Quærantur tot primi diversi quot hic sunt numeri, nempe duo, et secundum exponentes 1 et 2 inter se multiplicentur, nempe unus in quadratum alterius; in hoc casu satisfiet quæstioni, modò primi quos sumis superent quaternarium ⁽¹⁾ unitate.

Ex his constat facile posse inveniri numerum minimum qui quoties quis velit sit hypotenusa.

Invenire numerum qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis.

Sit datus numerus 10. Ejus duplum 20, cujus omnes partes primæ sumantur : 2. 2. 5. Ab unaquaque tolle unitatem : fiunt 1. 1. 4. Sumantur igitur tres numeri primi, qui nempe unitate superent quaternarium ⁽¹⁾ : verbi gratia, 5, 13, 17; et quadratoquadratus unius, propter exponentem 4, ducatur in reliquos duos, fiet numerus quæsitus.

Ex his facile potest inveniri minimus numerus qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis ⁽²⁾.

Ut autem dignoscatur quoties datus numerus ex duobus quadratis componitur :

Sit datus numerus 325. Numeri primi qui eum componunt, nempe quaternarium ⁽¹⁾ unitate superantes, sunt : 5, 13, hic semel, ille per quadratum. Exponentes disponantur : 2. 1. Productum multiplicatione jungatur summæ : fit 5, cui adjunctâ unitate, fit 6, cujus dimidium 3. Toties igitur numerus datus componitur ex duobus quadratis.

⁽¹⁾ Lisez « quaternarii multiplicem ».

⁽²⁾ Dans l'édition de Samuel Fermat, le texte de cet alinéa se trouve après celui des trois suivants.

Si essent tres exponentes, ut 2.2.1, ita procedendum : Productum sub prioribus adjunctum summæ facit 8. Ducatur 8 in tertium et jungatur productum summæ : fit 17, cui junge unitatem : fit 18, ejus dimidium dat 9. Toties iste secundus numerus componetur ex duobus quadratis.

Si ultimus numerus bifariam dividendus esset impar, tunc, demptâ unitate, reliqui dimidium sumi debet.

Sed proponatur, si placet, sequens quæstio : *Invenire numerum in integris qui adsumpto dato numero conficiat quadratum et sit hypotenusa quotlibet triangulorum rectangulorum.*

Hæc quæstio ardua est. Proponatur, verbi gratia, inveniendus numerus qui sit bis hypotenusa et adsumpto binario conficiat quadratum.

Erit quæsitus numerus 2023, et sunt alii infiniti idem præstantes, ut 3362, etc.

VIII (p. 133).

(Ad commentarium in quæstion. II Libr. IV.)

QUESTIO DIOPHANTI : Invenire duos numeros, ut illorum intervallum datum faciat numerum et euborum quoque ab ipsis ortorum sit quod præscribitur intervallum.

QUESTIO PRIMA BACHETI : Datis duobus cubis, invenire duos alios, quorum summa æqualis sit datorum intervallo. Oportet autem duplum minoris cubi non superare majorem.

Canon : Utrumque datorum euborum ducto ter in latus alterius, productos divide per summam euborum, a majore quotiente aufer minus latus, et minorem quotientem aufer a majore latere : relinquentur euborum quæsitum latera.

Determinationem operationis iteratione facillime tollimus et generaliter tum hanc quæstionem, tum sequentes quæstiones construimus, quod nec Bachetus nec ipse Vieta ⁽¹⁾ expedire potuit.

Sint dati cubi 64 et 125, inveniendi alii duo quorum summa æqualis sit datorum intervallo.

(1) Viète avait déjà traité comme Bachet les trois questions sur lesquelles portent cette observation de Fermat et la suivante. Voir ZETETIC. IV, 18, 19, 20 (pages 74-75 de l'édition de Schooten).

Ex questione tertia, folio sequenti ⁽¹⁾, quarantur duo alii cubi quorum differentia aequet differentiam datorum. Illos Bachetus invenit et sunt

$$\frac{15 \cdot 95 \cdot 992}{250 \cdot 647} \quad \text{et} \quad \frac{125}{250 \cdot 647}.$$

Isti duo cubi ex constructione habent intervallum aequale intervallo datorum; sed isti duo cubi, inventi per questionis tertiæ operationem, possunt jam transferri ad questionem primam, quum duplum minoris non superet majorem. Datis itaque his duobus cubis quarantur alii duo quorum summa aequetur intervallo datorum; id quidem licet per determinationem hujus questionis primæ. At intervallum datorum horum cuborum est per questionem tertiam aequale intervallo cuborum prius sumptorum 64 et 125; igitur construere nihil vetat duos cubos quorum summa aequalis sit intervallo datorum 64 et 125, quod sane miraretur ipse Bachetus.

Imo, si tres istæ questiones eant in circulum et iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem prestantes; ex inventis enim ultimo duobus cubis quorum summa aequet differentiam datorum, per questionis secundæ operationem quæremus duos alios quorum differentia aequet summam ultimorum, hoc est intervallum priorum, et ex hac differentia rursum quæremus summam et sic in infinitum.

IX (p. 135).

(Ad eundem commentarium.)

QUESTIO SECUNDA BACHETI : Datis duobus cubis, invenire duos alios, quorum differentia aequet summam datorum.

Canon : Utrumque datorum cuborum ducto ter in latus alterius, productos divide per intervallum cuborum, et minori quotienti adde majus latus, atque a majore quotiente aufer minus latus; summa et residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum.

QUESTIO TERTIA BACHETI : Datis duobus cubis, invenire alios duos, quorum differentia aequet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere majorem.

Canon : Productum ex utroque cubo ter in latus alterius divide per summam cuborum :

⁽¹⁾ Voir l'observation suivante.

a majore quotiente aufer minus latus, a minore quotiente aufer majus latus, relinquentur latera quesitorum cuborum.

Hujus quæstionis determinationem non esse legitimam, simili quâ usi in prima quæstione sumus operatione, aperiemus.

Imo ex supradictis quæstionem, quam Bachetus ignoravit, feliciter construemus :

Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos dividere,

idque infinitis modis per operationum continuatam, ut supra nominous, iterationem.

Sint duo cubi quibus alii duo æquales inveniendi 8 et 1. Primùm ex quæstione secunda querantur duo cubi quorum differentia æquet summam datorum, eruntque

$$\frac{8000}{343} \quad \text{et} \quad \frac{4913}{343}.$$

Quia duplum minoris excedit majorem, res deducitur ad tertiam quæstionem, quæ demum reducetur ad primam, et constabit propositio.

Si velis secundam solutionem, rursus quæstio redibit ad secundam etc.

Ut autem pateat quæstionis tertie determinationem non esse legitimam, datis duobus cubis 8 et 1, inveniendi alii duo quorum differentia æquet differentiam datorum.

Sane Bachetus impossibilem hanc quæstionem pronuntiaret; cubi tamen duo per nostram methodum inventi sunt sequentes quorum nempe differentia æquatur 7, differentie 8 et 1. Cubi autem illi duo sunt

$$\frac{2\ 024\ 284\ 625}{6\ 128\ 487} \quad \text{et} \quad \frac{1\ 981\ 385\ 216}{6\ 128\ 487},$$

latera ipsorum

$$\frac{1\ 265}{183} \quad \text{et} \quad \frac{1\ 256}{183}.$$

X (p. 146).

(Ad commentarium in quæstion. XI Libr. IV.)

QUESTIO DIOPHANTI : Invenire duos cubos suis aequales lateribus.

QUESTIO BACHETI : Invenire duos cubos quorum summa ad summam laterum sit in data ratione, dummodo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

Eadem addenda huic determinationi quæ in notis sequenti ⁽¹⁾ addidimus, et miror Bachetum non quod methodam generalem, quæ sane est difficilis, non viderit, sed quod saltem non admonuerit lectorem hanc quæ ab ipso traditur non esse generalem.

XI (p. 148).

(Ad quæstion. XII Libr. IV.)

Invenire duos cubos quorum intervallum æquale sit intervallo laterum ipsorum.

Utrum verò invenire liceat *duos quadratoquadratos quorum intervallum æquale sit intervallo laterum ipsorum*, de hoc inquiretur et tentetur artificium nostræ methodi, quod haud dubie succedet.

Querantur enim duo quadratoquadrati ita ut differentia laterum sit 1, et differentia quadratoquadratorum sit cubus. Erunt latera, per primam operationem,

$$-\frac{9}{22} \quad \text{et} \quad \frac{13}{22}.$$

Sed, quia primus numerus notatur signo —, iteretur operatio juxta

⁽¹⁾ Voir Observation XII. Soit à résoudre

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = \alpha;$$

le procédé de Bachet revient à éliminer y en posant $x+y = z$. On a alors

$$3x^2 - 3xz + z^2 = \alpha,$$

équation qui se traite facilement par les méthodes de Diophante, si α est carré ou triple d'un carré.

nostram methodum et ponatur primum latus $1N + \frac{9}{22}$;
 secundum erit $1N + \frac{13}{22}$,
 et incidetur in novam operationem quæ in veris numeris quæstioni
 satisfaciet.

XII (p. 148).

(Ad commentarium in eandem quæstionem.)

QUÆSTIO BACHETI : Invenire duos cubos, quorum intervallum ad intervallum laterum
 datum habeat rationem, dummo lo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

Determinatio est illegitima, quia non generalis. Addendum igitur
 « vel multiplex per numeros primos qui superant unitate ternarii
 multiplices aut ab ipsis compositos », ut 7, 13, 19, 37, etc., vel 21,
 91, etc. Demonstratio et constructio ex nostra methodo petendæ.

XIII (p. 154).

(Ad quæstion. XVII Libr. IV.)

Invenire tres numeros æquales quadrato, ita ut quadratus ejuslibet ipsorum adseito
 sequente numero faciat quadratum.

Elegantius fortasse ita solvetur hæc quæstio.

Ponatur primus numerus $1N$,

secundus $2N + 1$, ut cum quadrato primi conficiat
 quadratum;

ponatur tertius quilibet unitatum et numerorum numerus, eà condi-
 tione ut additus quadrato secundi conficiat quadratum; verbi gratia,
 sit

$$4N + 3.$$

Ita igitur duabus propositi partibus fit satis; superest ut summa
 trium, sed et quadratus tertii unà cum primo, conficiat quadratum.

Summa trium est $4 + 7N$;

summa verò quadrati tertii et primi est $9 + 25N + 16Q$,

oriturque duplicata aequalitas, cujus solutio in promptu si unitates quadratas ad eundem numerum quadratum in utrovis numero quadrato adequando revoces.

Eâdemque viâ facillime extendetur quaestio ad quatuor numeros et infinitos : cavendum enim solummodo erit ut summa unitatum, quae in singulis numeris ponuntur, conficiat quadratum : quod quidem facillimum est.

XIV (p. 156).

(Ad quæstion. XVIII Libr. IV.)

Invenire tres numeros aequales quadrato, ut cujusvis ipsorum quadratus, dempto qui eum ordine sequitur, faciat quadratum.

Eodem quo in superiore quaestione usi sumus ratiocinio, hanc quoque solvemus et ad quotlibet numeros extendemus.

XV (p. 159).

(Ad quæstion. XX Libr. IV.)

Invenire tres numeros indefinite, ut quem bini producant mutua multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum.

Proponatur invenire tres numeros ut quem bini producant mutuâ multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum, et praeterea unusquisque trium, adscitâ unitate, faciat quadratum.

Hujus quaestionis solutionem subjungemus et jam confecta est ⁽¹⁾. Ita fiat solutio indefinita praesentis quaestionis ⁽²⁾ ut unitates primi et tertii numeri, additâ unitate, conficiant quadratos : verbi gratia, sint

⁽¹⁾ Diophante (V, 5) a donné une solution de ce problème dans le cas général où le nombre à ajouter (ici l'unité) est quelconque.

⁽²⁾ La solution de 202/579 de Diophante peut être représentée par les trois nombres

$$m^2N - 2m, \quad N, \quad (m+1)^2N + 2(m+1).$$

tres numeri indefinite

$$\text{primus} \dots\dots \frac{169}{5184} N + \frac{13}{36},$$

$$\text{secundus} \dots\dots 1 N,$$

$$\text{tertius} \dots\dots \frac{725}{5184} N + \frac{85}{36}.$$

Patet solutionem hanc indefinitam satisfacere conditionibus hujus quæstionis vigesimæ; superest ut singuli ex illis numeris, adscitâ unitate, conficiant quadratos et orietur triplicata æqualitas, cujus solutio erit in promptu ex nostra methodo, quum numerus unitatum in quolibet ex istis numeris unitate auctis sit quadratus.

XVI (p. 161).

(Ad quæstion. XXI Libr. IV.)

Invenire quatuor numeros, ut qui fit ex binorum mutua multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum ⁽¹⁾.

Inveniantur tres numeri quilibet ut qui fit binorum mutuâ multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum : verbi gratia, sint illi numeri 3, 1, 8.

Queratur jam quartus eâ conditione ut qui fit sub tribus inventis sigillatim in quartum, adscitâ unitate, sit quadratus. Ponatur inveniendus esse $1N$; ergo

$$3N + 1, \quad \text{item} \quad 1N + 1, \quad \text{item} \quad 8N + 1$$

æquantur quadrato et oritur triplicata æqualitas cujus solutio inventioni nostræ debetur. Vide quæ adnotavimus ad quæstionem 24 Libri VI.

(1) Fermat donne de ce problème une solution différente de celle de Diophante.

XVII (p. 165).

(Ad quæstion. XXIII Libr. IV.)

Invenire tres numeros, ut solidus sub ipsis contentus adscito quolibet ipsorum faciat quadratum.

Non solum absque lemmate Diophanti ⁽¹⁾, sed etiam absque duplicata æqualitate ⁽²⁾, solvetur quæstio.

Ponatur solidum sub tribus 1 Q = 2 N,
 primus numerorum sit unitas,
 secundus 2 N.

Haec namque duobus partibus propositionis satisfit.

Pro tertio, dividatur solidum sub tribus, 1 Q = 2 N, per rectangu-

(1) Soient x_1, x_2, x_3 les trois nombres cherchés. La solution de Diophante revient à poser

$$x_1 = 1, \quad x_1 x_2 x_3 = x^2 + 2x, \quad x_1 x_2 x_3 + x_2 = (x + m)^2;$$

d'où

$$x_2 = 2(m+1)x + m^2 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{x^2 + 2x}{2(m+1)x + m^2}.$$

Il reste ainsi à satisfaire à une dernière condition, à savoir que $x_1 x_2 x_3 + x_3$ soit carré. Le *lemme* employé par Diophante consiste de fait à déterminer m en sorte que x_3 soit linéaire en x , c'est-à-dire à satisfaire à la relation

$$2(m+1) = \frac{1}{2}m^2;$$

d'où

$$m = 2 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1}{2}x, \quad \text{avec} \quad x_2 = 2x + 4,$$

et enfin

$$x_1 x_2 x_3 + x_3 = x^2 + \frac{5}{2}x,$$

expression qu'il est facile de rendre carrée. Il est aisé de voir que la solution de Fermat est au fond la même: car on la retrouve, si l'on change x en $N-2$.

(2) L'emploi de la *double équation* était indiqué par Bachet, d'après la marche suivie par Diophante lui-même dans le problème suivant, qui ne diffère de celui-ci que parce que chacun des nombres cherchés doit être non pas ajouté, mais retranché du produit des trois, pour former les expressions à évaluer à des carrés. Ici Bachet posait de fait

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = x - 1,$$

et il ramenait le problème à la *double équation*

$$x^2 - x + 1 = x^2, \quad x^2 - 1 = y^2.$$

lum sub primo et secundo, quod est $2N$; oriatur ex hac divisione tertius, $\frac{1}{2}N - 1$, quo addito ad solidum sub tribus fit

$$1Q = \frac{3}{2}N - 1, \quad \text{quod æquari debet quadrato.}$$

Oportet autem valorem numeri majorem esse binario, propter positiones jam factas; æquetur igitur quadrato cujus latus $1N -$ aliquo unitatum numero binario majori. Omnia constabunt.

XVIII (p. 180).

(Ad commentarium in quæstion. XXXI Libr. IV.)

QÆSTIO : Invenire quatuor numeros quadratos, quorum summa, cum summâ laterum conjuncta, numerum imperatum faciat ⁽¹⁾.

Imo propositionem pulcherrimam et maxime generalem nos primi deteximus : nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum; esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum; esse pentagonum vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositum; et sic deinceps in infinitum, in hexagonis, heptagonis et polygonis quibuslibet, enuntiandâ videlicet pro numero angulorum generali et mirabili propositione.

Ejus autem demonstrationem, quæ ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet : opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hac in parte ultra veteres et notos terminos mirum in modum promoveri.

⁽¹⁾ Ce problème, comme le remarque Bachet, se ramène facilement à décomposer un nombre donné en quatre carrés, question que Diophante n'a soumise à aucune règle, mais qu'il semble considérer comme toujours possible. Bachet affirme qu'en effet tout nombre entier doit être ou carré ou somme de 2, 3, ou 4 carrés entiers; il n'en a pas la démonstration, mais il s'en réfère à l'induction, donne le Tableau de la composition pour tous les nombres de 1 à 120, et ajoute qu'il a poussé l'expérience jusqu'à 325.

XIX (p. 188).

(Ad quæstion. XXXV Libr. IV.)

Datum numerum dividere in tres numeros, ut qui sit primo in secundum ducto, sive addito tertio, sive detracto, quadratum faciat. Esto datus 6.

Haec facilius fiet operatio: Datus numerus 6 utcumque dividatur, verbi gratia in 5 et 1. Productus demptâ unitate, hoc est 4, per 6, datum numerum, dividatur: eveniet $\frac{2}{3}$. Quem si tum a 5, tum ab 1 abstuleris, duo residua $\frac{14}{3}$ et $\frac{4}{3}$ erunt duæ priores partes numeri dividendi; tertia igitur erit $\frac{4}{3}$ (1).

XX (p. 203).

(Ad commentarium in quæstion. XLIV Libr. IV.)

QUESTIO. — Invenire tres numeros, ut compositus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum, in secundum faciat quadratum, in tertium faciat cubum.

BACHETUS. — ... Adverte postremo, in fingendo latere ultimi quadrati, talem adhibendam esse cautionem, ut valor Numeri reperiatur in integris numeris, quum numerus triangulus non posset esse nisi integer. Id autem semper succedet operando modo a Diophanto tradito, si quadrati latus fingatur a tot Numeris qui sint latus quadratorum in numero quadrato aquando contentorum — 1. Cæterum vix aliter id fieri posse, satis experiendo deprehendes (2).

Experientiam non satis exactam fecit Bachetus. Sumatur quilibet

(1) La solution de Fermat, fondée sur une identité facile à reconnaître, est essentiellement différente de celle de Diophante.

(2) La solution de Diophante, avec les généralisations de Bachet, peut se représenter comme suit.

Soient x_1, x_2, x_3 les trois nombres cherchés. Posons

$$x_1 + x_2 + x_3 = x^2$$

et

$$x_1 = \frac{x(x+1)}{2x^2}, \quad x_2 = \frac{y^2}{x^2}, \quad x_3 = \frac{z^3}{x^2},$$

il vient

$$x^4 = \frac{x(x+1)}{2} + y^2 + z^3.$$

Posons maintenant

$$y = x^2 + z^2,$$

cubus, verbi gratia, ejus latus multiplici ternarii superaddat unitatem. Erunt, verbi gratia,

$$2Q = 344 \quad \text{æquanda triangulo :}$$

ergo

$$16Q = 5504 \quad \text{æquabuntur quadrato,}$$

cujus latus finges, si libet,

$$4N = 3.$$

Etc.; nihil enim vetat quominus generali methodo, loco etiam ipsius 3, reliquos in infinitum impares usurpemus, variando cubos.

XXI (p. 209).

(Ad commentarium in quæstion. XLV Libr. IV.)

QUESTIO DIOPHANTI. — Invenire tres numeros, ut intervallum majoris et mediæ ad intervallum mediæ et minoris datam habeat rationem, sed et bini sumpti quadratumificent.

BACHETUS. — ...Quemadmodum ergo in hac quæstione Diophantus docet modum quo duo numeri simul æquantur quadrato, quum uterque componitur ex Numeris et unitatibus, et numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem unitatum sunt inæquales et quadrati : sic aio modum dari posse resolvendi duplicatam æqualitatem, quum uterque propositorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris et unitatibus, et numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent

on a

$$\frac{x(x+1)}{2} = 2z^2x^2 - z^4 - \gamma^4,$$

d'où l'on posera

$$(2x+1)^2 \quad \text{ou} \quad 16z^2x^2 - 8z^4 - 8\gamma^4 + 1 = (4zx - \delta)^2$$

et

$$x = \frac{8z^4 + 8\gamma^4 + \delta^2 - 1}{8z\delta}.$$

Mais il faut que x soit entier et, par conséquent, que $\frac{8z^4 + 8\gamma^4 + (\delta + 1)^2}{4\delta}$ le soit.

Si l'on prend $\delta = 1$, comme l'a fait Diophante, et comme Bachet l'a cru nécessaire, on peut prendre tout à fait arbitrairement les entiers z et γ .

Fermat prend $z = 1$, comme l'avait fait Diophante; il fait d'ailleurs, dans l'exemple qu'il choisit,

$$\gamma = 7, \quad \delta = 3$$

ationem quadrati ad quadratum, sed et numeri unitatum inaequales sunt, sive quadrati sint, sive non. Id autem præstabimus in duplici casu.

Primus casus est, quum numerorum quadrato æquandorum intervallum tale est ut, eo per aliquem unitatum numerum multiplicato vel diviso, et producto vel quotiente a minore propositorum numerorum detracto, supersit unitatum numerus solus quadratus...

Secundus casus est, quum numerorum quadrato æquandorum intervallum tale est ut, eo per aliquem unitatum numerum multiplicato vel diviso, et producto vel quotiente a minore propositorum numerorum detracto, deficiat unitatum numerus solus, qui ad multiplicatorem vel divisorem rationem habeat quadrati ad quadratum ...

Sed proponatur, si placet, hæc duplicata æqualitas, nempe

$$2N + 5 \quad \text{et} \quad 6N + 3 \quad \text{æquandi quadrato,}$$

$$\text{Quadratus æquandus } 2N + 5 \quad \text{erit} \quad 16,$$

et

$$\text{quadratus æquandus } 6N + 3 \quad \text{erit} \quad 36,$$

et invenientur alii in infinitum quæstioni satisfaciētes. Nec difficile est regulam generalem ad hujusmodi quæstionum solutionem proponere, ut vix limitatio ista Bacheti sit tanto viro digna, quum ad infinitos casus extendi quod in duobus tantum adinvenit, facillime possit, imo et ad casus omnes possibiles.

XXII (p. 115).

(Ad quæstion. III Libr. V.)

Dato numero apponere tres numeros, ut quilibet ipsorum et qui a binis producit quibusvis, datum adsumens numerum, faciat quadratum.

Ex hac propositione facile deducetur sequens quæstio :

Invenire quatuor numeros ea conditione ut quod sub binis producat, adscito dato numero, faciat quadratum.

Inveniantur tres quæstioni satisfaciētes ita ut singuli dato numero adiecti efficiant quadratos juxta hanc propositionem. Ponatur quartus inveniendus esse $4N + 1$. Orietur triplicata æqualitas cujus solutio

nostræ methodi beneficio erit in promptu. Vide adnotata ad 24^{am} quæstionem Libri VI.

Solvetur itaque quæstio, quam proposuit Bachetus ⁽¹⁾ ad quæstionem 12 Libri III, per hanc methodum quæ, quum multo sit generatior, hoc præterea amplius habet quam methodus Bacheti, quod tres priores numeri aucti dato numero conficiant quadratos in nostra solutione.

An vero ita solvi possit quæstio *ut etiam quartus auctus dato numero conficiat quadratum*, hoc sane hactenus ignoramus : inquiratur itaque ulterius ⁽²⁾.

XXIII (p. 229).

(Ad quæstion. VIII Libr. V.)

Invenire tria triangula rectangula quorum areae sint æquales.

Num vero inveniri possunt *quatuor aut etiam plura in infinitum triangula æqualis areae*, nihil videtur obstarè quominus quæstio sit possibilis : inquiratur itaque ulterius.

Nos hoc problema construximus, imò et datà quâlibet trianguli

(1) Page 110. — Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre nombres cherchés, et a le nombre donné.

La solution de Bachet revient à poser

$$x_1 = \frac{v^2 - a}{v - u}, \quad x_2 = \frac{v^2 - a}{v - u}, \quad x_3 = 2(x_1 + x_2) - (v - u),$$

ce qui satisfait aux conditions pour trois nombres. Si, pour le quatrième, on pose

$$x_4 = v - u,$$

on n'aura évidemment qu'à satisfaire en outre à la condition bien facile que

$$x_3 x_4 + a \text{ ou } (v + u)^2 = 3a$$

soit un carré indéterminé.

Bachet l'a résolue, en fait, de deux façons différentes : 1^{re} par rapport à $v - u$, en se donnant a ; 2^o par rapport à u , en se donnant $v - u$, qu'il suppose inutilement devoir être un carré.

(2) Dans l'Observation XVI, Fermat a donné une solution pour le cas où le nombre a ajouter est l'unité.

area infinita triangula ejusdem areae exhibemus : verbi gratia, data area 6 trianguli 3. 4. 5., en aliud triangulum ejusdem areae

$$\frac{7}{10}, \quad \frac{120}{7}, \quad \frac{1201}{70},$$

aut, si placet eadem denominatio,

$$\frac{49}{70}, \quad \frac{1200}{70}, \quad \frac{1201}{70}.$$

Perpetua et constans methodus hæc est : Exponatur quodlibet triangulum, cujus hypotenusa Z , basis B , perpendicularum D . Ab eo sic formatur aliud triangulum dissimile ejusdem areae : nempe formetur abs Z quadrato et B in D bis, et planoplana lateribus similia applicentur Z in B quadratum bis — Z in D quadratum bis. Hoc novum triangulum habebit aream aequalem areae precedentis.

Ad hoc secundo eadem methodo formetur tertium, a tertio quartum, a quarto quintum, et fient triangula in infinitum dissimilia ejusdem areae.

Et ne dubites plura tribus dari posse, inventis tribus Diophanti

$$40, 42, 58., \quad 24, 70, 74., \quad \text{et} \quad 15, 112, 113.,$$

quartum adjungimus dissimile ejusdem tamen areae :

$$\begin{aligned} 1 \frac{412}{1189} \frac{881}{1189} & \text{ hypotenusa,} \\ 1 \frac{412}{1189} \frac{880}{1189} & \text{ basis,} \\ \frac{1681}{1189} & \text{ perpendicularum,} \end{aligned}$$

et, omnibus in eundem denominatorem ductis, fient quatuor triangula in integris aequalis areae quæ sequuntur :

Primum	47 560.	49 938.	68 962.
Secundum	28 536.	83 230.	87 986.
Tertium	17 835.	133 168.	134 357.
Quartum	1 681.	1 412 880.	1 412 881.

eàdemque methodo invenientur triangula ejusdem areae in infinitum et quæstio sequens ultra Diophanteos limites progredietur.

En etiam alià methodo ⁽¹⁾ triangulum cujus area facit sextuplum quadrati, sicut 3. 4. 5. : nempe

$$2 \frac{896}{105} \frac{804}{601}, \quad 7 \frac{776}{105} \frac{485}{601}, \quad 7 \frac{776}{105} \frac{485}{601}.$$

⁽¹⁾ J. DE BILLA (*Doctrinae analyticae inventum novum*, I, 38, p. 11) : « Diophantus L. V. q. 8 tradit artem inveniendi tria triangula rectangula quæ sint aequalia quoad aream. Qui vero plura ab ipso expetet, nunquam obtinebit : præterea nunquam tradidit Diophantus methodum inveniendi triangulum dato triangulo æquale quoad aream. Fermatius utrumque mox atque eàdem operatione præstabit. »

« Sit verbi gratia inveniendum triangulum cujus area sit 6, qualis est area trianguli rectanguli 3. 4. 5. »

« Esto unum latus ejuspian trianguli rectanguli 3, et aliud latus sit $1X + 4$. Horum quadrata simul sumpta exhibent

$$25 + 1Q + 8X$$

pro quadrato hypotenuse : quare iste numerus æquatur quadrato. »

« Deinde area istius trianguli, $\frac{3}{2}X + 6$, debet esse sextupla alicujus quadrati (quia postulatur aream esse 6) : ergo ejus area sextans quadratus est, ac proinde ille ductus in 36 efficiet quadratum. Efficit autem

$$9X + 36 :$$

igitur hic numerus æquandus est quadrato.

» En igitur duos terminos duplicatae æqualitatis :

$$9X + 36 \quad \text{et} \quad 25 + 1Q + 8X.$$

In his autem unitatum numerus quadratus est : ergo valor radicis facile reperietur, critque

$$\frac{60}{21} \frac{530}{650} \frac{400}{409},$$

ac proinde

$$1X + 4 \quad \text{erit} \quad \frac{2}{2} \frac{896}{105} \frac{804}{601}.$$

Aliud autem latus circa rectum est 3. Igitur horum quadrata simul sumpta faciunt quadratum cujus latus

$$\frac{7}{2} \frac{776}{105} \frac{485}{601}$$

erit hypotenusa. Ergo habes triangulum rectangulum

$$\frac{7}{2} \frac{776}{105} \frac{485}{601}, \quad \frac{2}{2} \frac{896}{105} \frac{804}{601}, \quad 3$$

cujus area est sextupla ejuspian quadrati, nempe

$$\frac{724}{2} \frac{201}{105 \cdot 601};$$

XXIV (p. 221).

(Ad quæstion. IX Libr. V.)

Invenire tres numeros ut uniuscujusque quadratus, summâ trium sive additâ sive detractâ, faciat quadratum.

Ex supradictis patet posse nos construere generaliter problema :

Invenire quocumque numeros ut uniuscujusque quadratus, summâ omnium sive additâ sive detractâ, quadratum faciat (*).

Hanc quæstionem forte Bachetus ignoravit : Diophantum quippe promovisset, ut supra 31^a quæstione Libri IV et aliis in locis, si quæstionis hujus solutionem detexisset.

XXV (p. 224).

(Ad commentarium in quæstion. XII Libr. V.)

QUESTIO DIOPHANTI. — Unitatem dividere in duas partes, et utrique segmento datum numerum adjicere et facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse * neque

hujus vero quadrati latus est

$$\frac{851}{1551}.$$

Per quod si divides singula latera trianguli mox reperti, habebis triangulum quæsitum

$$\frac{12\ 061\ 328\ 235}{2\ 047\ 166\ 451}, \quad \frac{4\ 492\ 943\ 004}{2\ 047\ 166\ 451}, \quad \frac{4\ 653}{851},$$

cujus area est 6. »

Adverte nos invenisse hoc triangulum per illud quod datum fuit 3, 4, 5, ac per inventum inveniri posse tertium: per tertium invenietur quartum, et sic in infinitum. »

(*) La question V, 9 de Diophante se résout en effet par une application immédiate de la solution du problème précédent.

Soient a_1, a_2, \dots, a_n les hypoténuses de n triangles rectangles ayant une même aire A , connue

$$a_p^2 \pm 4A \text{ est carré,}$$

les nombres

$$a_p, \frac{\sum_1^n a_n}{4A}$$

satisferont à la question posée par Fermat.

duplum ejus N . unitas majorem habere quadrantem quam est numerus, quo ipsum metitur primus numerus * ⁽¹⁾.

BACHETUS.... Reliqua verò verba « *neque duplum ejus, etc.* » adeo vitata sunt ut nullam commode recipere possint explicationem. Non dubito quidem Diophantum respexisse ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus sit, ut duplum ejus unitate auctum sit quadratus numerus vel compositus ex duobus quadratis. Sed quid sibi velit in tanta verborum caligine divinare non possumus: id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatiorem incidit.... Sane quod ait Xilander, verba illa corrupta videri velle, debere eam qui datur esse duplum numeri primi, id utique futile est et nulli fundamento nixum, quodque ipsà statim experientiâ refelli potest : nam, si datus sit 10, is est duplus numeri primi 5 et tamen quæstioni solvendi minime reperitur idoneus, nam oporteret dividere in duos quadratos numerum 21. Quod quidem impossibile est, ut reor, quum is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis.

Numerus 21 non potest dividi in duos quadratos in fractis. Hoc autem facillime demonstrare possumus, et generalius omnis numerus cujus triens non habet trientem non potest dividi in duos quadratos neque in integris neque in fractis.

XXVI (p. 205).

(Ad idem commentarium.)

BACHETUS. — Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluisse duplum dati numeri paris unitate auctum esse numerum primum, quandoquidem omnes fere hujusmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales sunt 5, 13, 17, 29, 41, alique primi numeri qui sublata unitate relinquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio sustineri potest. Nam primum hac ratione per hujusmodi conditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum unitate auctum est quadratus numerus.... Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum unitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales sunt 22, 58, 62 et alii innumerabiles. Nam dupli horum unitate aucti sunt 45, 117.

⁽¹⁾ Le texte grec correspondant à ce passage incompréhensible de la version latine est le suivant dans l'édition de Bachet (leçon du manuscrit fonds grec n° 2379 de la Bibliothèque Nationale) :

μήτε ὁ διπλασίτων αὐτοῦ ἢ μὲν $\bar{\alpha}$, μέζονα $\bar{\epsilon}$ / χ μέρος $\bar{\delta}$, ἢ μεταρείται ὑπὸ τοῦ $\bar{\alpha}''$, ξ'' ,
et, d'après Bachet, dans un *Vaticanus græcus* (probablement le n° 304) :
μήτε ὁ διπλασίτων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονᾶδα $\bar{\alpha}$, μέζονα $\bar{\epsilon}$ / χ μέρος τέταρτον, ἢ μεταρείται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.

Ces deux leçons reviennent à la même, et tous les manuscrits connus de Diophante sont corrompus de la même façon.

105, quorum nullus est primus numerus, quum quilibet multos habeat metientes: unusquisque tamen e duobus quadratis conflatur, primus scilicet ex quadratis 36 et 9, secundus ex quadratis 81 et 36, tertius ex quadratis 100 et 25.

Vera limitatio hæc est, generalis nempe et omnes numeros inutiles excludens :

Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum ejus unitate auctum, per maximum quadratum ex quo mensuratur divisum, dividi a quovis numero primo unitate minori quam multiplex quaternarii.

XXVII (p. 232).

(Ad commentarium in quæstion. XIV Libr. V.)

QUESTIO DIOPHANTI. — Unitatem dividere in tres numeros et cuilibet addere datum eundem numerum et ita quolibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium esse neque aliquem eorum qui fit addito binario ad octonarii multiplicem.

BACHETUS Ingeniosa est et autore digna hujusmodi limitatio. Caterum quamvis, ut ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen sufficiens, nam non solum numeri omnes hæc limitatione comprehensi solvendæ quæstioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9 et omnes alii qui fiunt addito 9 ad 32 vel ad aliquem ejus multiplicem, quales sunt 41, 73, 105, etc.; nam horum triplum additâ unitate neque quadratus est neque numerus e duobus vel tribus quadratis compositus....

Caterum an hæ duæ limitationes simul sufficientes sint, ita ut per utramque simul excludantur omnes omnino numeri quorum triplum unitate auctum non est quadratus nec e duobus vel tribus quadratis compositus, non ausim temere affirmare. Equidem vix adducor ut aliter sentiam, quum in omnibus numeris ab unitate usque ad 325 id simul expertus.

Limitatio ipsa Bacheti est insufficiens, imo nec ipsius experientia salis fuit accurata, nam 37 numerus cadit in limitationem, non autem in regulam.

Vera limitatio sic concipi debet :

Exponentur duæ progressionēs quadruplæ altera ab unitate, altera ab octonario, et una alteri superponatur sic :

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 4, & 16, & 64, & 256, & 1024, & 4096, & \text{etc.}, \\ 8, & 32, & 128, & 512, & 2048, & 8192, & 32768, & \text{etc.} \end{array}$$

et considerando primo terminum primum secundæ qui est 8, oportet

datum numerum non esse duplum unitatis, quia ipsi superponatur unitas, neque superare duplo unitatis multiplicem 8.

Deinde, considerando secundum terminum secundae progressionis, qui est 32, sumatur duplum numeri superpositi qui est 4 : fit 8, cui si addas omnes in eadem progressionem superiori proxime antecedentes (in hoc exemplo invenietur sola unitas), fit 9.

Sumptis igitur duobus numeris 32 et 9, oportet datum numerum neque esse 9 neque superare dicto numero 9 multiplicem 32.

Consideretur mox tertius progressionis secundae terminus, qui est 128 : sumatur duplum numeri superpositi, qui est 16 : fit 32, cui si addas omnes in eadem progressionem superiori proxime antecedentes, qui jam sunt 1 et 4, fit 37. Sumptis igitur duobus numeris 128 et 37, oportet datum numerum neque esse 37, neque superare dicto 37 multiplicem 128.

Considerato deinde quarto progressionis secundae termino, fiet ex methodo numeri 512 et 149. Oportebit itaque numerum neque esse 149, neque superare dicto 149 multiplicem 512.

Et est uniformis et perpetua in infinitum methodus, quam neque Diophantus generaliter indicavit, nec Bachetus ipse detexit, cujus vel ipsa experientia fallit, ut jam praemonuimus, non solum in numero 37 qui est intra limites experientiae de qua fidem facit, sed etiam in numero 149 et aliis.

XXVIII (p. 241).

(Ad quæstion. XIX Libr. V.)

Invenire tres numeros, ut eubus summa eorum, quovis ipsorum detracto, faciat eubum. Ponatur rursus trium summa 1N. et ipsi $\frac{1}{8}$ C, $\frac{26}{9}$ C, $\frac{63}{4}$ C. Superest ut tres conjuncti æquantur 1N. fit ergo $\frac{1877}{1728}$ C aequale 1N. et omnia per numerum dividantur, fit $\frac{1877}{1728}$ Q aequale 1. est autem 1 quadratus. Oportebat ergo et numerum quadratorum esse quadratum : unde autem is natus est? Quod a ternario subducti sunt tres cubi.

Εὐρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἕκαστος συγχευόμενος ἐκ τῶν τριῶν κύβος γένηται ἑκάστην ποιεῖν κύβον. τετάρθρωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $\frac{1}{8}$ Ᾱ. καὶ αὐτῶν ὁ μὲν κύβος $\frac{1}{512}$, ὁ δὲ κύβος $\frac{26}{729}$, ὁ δὲ κύβος $\frac{63}{256}$. λοιπὸν ἐστὶ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι εἰς Ᾱ. γίνεται κύβικόν $\frac{1877}{1728}$ Ᾱ, ἴσον εἰς Ᾱ. πάντα παρὰ ἀριθμὸν, καὶ γίνεται δυνάμευστόν $\frac{1877}{1728}$ Ᾱ, ἴσον μὲν Ᾱ. καὶ ἐστὶν ἡ μόνος τετράγωνος, δεύσει ἄρα καὶ τὰς δυνάμεις εἶναι τετράγωνον. πόθεν

quorum quilibet minor est unitate. Eo itaque res redit, ut inveniantur tres cubi, quorum quilibet sit minor unitate, summa autem ipsorum a ternario sublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem esse unitate, si statuamus tres numeros simul unitate minores, multo minores singuli erunt unitate. Sic autem quadratum qui relinquetur oportebit majorem esse binario. Statuatur quadratus qui relinquitur $2\frac{1}{4}$. Oportet igitur $\frac{1}{4}$ dividere in tres cubos et horum multiplicia secundum aliquos cubos divisa. Esto secundum 16. Oportet igitur ut dividamus 162 in tres cubos. At 162 componitur ex cubo 125 et intervallo duorum cuborum, 64 et 27. Habemus autem in porismatis, omnium duorum cuborum intervallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propositum initio et sumamus unumquemque cuborum inventorum, et quolibet ab unitate subtracto, residua statuamus pro quaesitis numeris et sit summa 1N. Ita fiet ut cubus summae, quovis ipsorum detracto, cubum faciat. Restat ut tres simul aequentur 1N. fit autem trium summa $2\frac{1}{4}$ C. Hoc ergo aequatur 1N. unde fiet 1N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones.

ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν δ^3 ἐκ τοῦ ἀπὸ τριῶν ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ὑπαγορεύεται εἰς τὸ εὐρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ^o $\bar{2}$. τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἔσθ' ἐν ἀπὸ τριῶν ποιῆι τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζήτοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι μονάδος μιᾶς, ἐν ἧρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἄριθμούς ἐλάσσονας μονάδος $\bar{2}$. πολλῶν ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μονάδος $\bar{2}$. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετράγωνος μείζων εἶναι δοῦδος, τετράγῳ καταλειπόμενος τετράγωνος μ^o $\bar{3}$. $\bar{2}^3$. δεῖ οὖν τὰ $\bar{3}^3$ διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους, καὶ κατὰ τούτων πολλαπλασιάσαι κατὰ τινῶν κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὲ κατὰ τὸν $\sigma\iota\varsigma$. ὀφειλομένη οὖν τὸν $\bar{3}\bar{3}\bar{3}$ διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. σύγκειται δὲ ὁ $\bar{3}\bar{3}\bar{3}$ ἕκτε κύβου τοῦ $\bar{3}\kappa\epsilon$ καὶ δύο κύβων ὑπερορχῆς τοῦτε $\bar{3}\delta$ καὶ τοῦ $\kappa\zeta$. ἔρομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν * ὅτι πάντων δύο κύβων ἢ ὑπερορχῆ \bar{x}^o *. ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τῆς σουμεν ἕκαστον κύβον εὐρεθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἄριθμὸν $\bar{2}$. καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβων λειψάντη ἕκαστον, ποιεῖν κύβον. λοιπὸν ἐστὶ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ζ^o $\bar{2}$. γίνονται δὲ οἱ τρεῖς κ^o $\bar{3}$ $\bar{2}^3$. ταῦτα ἴσα ζ^o $\bar{2}$. ὅθεν γίνονται ὁ ζ^o μ^o $\bar{3}$. ἐπὶ τῆς ὑποστάσεως.

Solutionis modum Diophantus non exprimit aut graeca corrupta sunt. Bachetus (1) casu adjutum Diophantum arbitratur, quod tamen non admittimus, quoniam Diophanteam methodum non difficilem inventu existimemus.

Inveniendus quadratus binario major, ternario minor, qui a ternario subtractus relinquat numerum in tres cubos dividendum.

(1) Il est aisé de voir que la solution particulière donnée par Diophante ne peut être obtenue avec les positions de Fermat, et l'on a dès lors le droit de répéter avec Bachet : « Quamobrem casu factum videtur ut sumpsit autor $2\frac{1}{4}$, quo de 3 sublato relinquitur $\frac{2}{3}$ ex tribus cubis compositus. »

Ponatur quæsitæ quadrati latus esse quemlibet numerorum numerum
— unitate : verbi gratia

$$1N - 1;$$

ipsius quadratus a ternario subtractus relinquit

$$2 - 1Q + 2N,$$

cui inveniendi tres cubi æquales qui sic effingendi ut æqualitas tandem consistat inter duas tantum species proximas.

Id quidem innumeris modis construi potest : Sit unius ex cubis latus

$$1 - \frac{1}{4}N;$$

alterius (ut numerus numerorum in ambobus cubis efficiat $2N$) sit

$$1 + \frac{1}{4}N;$$

tertii latus in numeris dumtaxat fingendum, qui etiam, ne valor $1N$ quæsitos terminos evadat, debent notari signo defectûs, nec est operosum eum numerum numerorum sumere cujus valor æquationem ad præstitutos redigat terminos.

Hoc peracto, patet primum ex cubis esse minorem unitate, ut quærebamus; quum igitur secundus sit major et tertius signo defectûs notetur, patet differentiam secundi et tertii æquandam esse duobus cubis, quam ob rationem ad secundam operationem et Diophantus et nos devolvimur.

« Habemus autem » inquit « in porismatibus omnium duorum cuborum intervallum componi ex duobus cubis. »

Hæret iterum Bachetus ⁽¹⁾ et, destitutus porismatibus Diophanteis, hanc quæstionem secundam determinatione indigere contendit : duorum quippe cuborum intervallum eâ tantum conditione in duos cubos dividere docet, dummodo major datorum cuborum excedat duplum minoris. Nam quomodo omnium duorum cuborum intervallum dividatur in duos cubos ignotum sibi ingenue profitetur. Nos supra ad

(1) Voir Observation VIII.

quaestionem Libri IV secundam et hanc et reliquas hujus materiae quaestiones generaliter construendi modum feliciter deteximus.

XXIX (p. 169).

(Ad quaestionem XXIV Libr. V.)

Invenire tres quadratos, ut solidus sub ipsis contentus, quovis ipsorum adscito, quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. et quarantur tres quadrati quorum quilibet adscitâ unitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest a quovis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, et accipiens quadratum unius laterum circa rectum, divido eum per quadratum alterius laterum circa rectum, et invenio quadratos, unum $\frac{1}{16}$ Q, alterum $\frac{9}{16}$ Q, tertium $\frac{64}{225}$ Q, et quilibet ipsorum cum 1 Q facit quadratum. Restat ut solidus sub tribus contentus aequetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{1}{518,400}$ CC. hoc aequatur 1 Q, et omnia ad eundem denominatorem reducendo, et dividendo per 1 Q, fiunt $\frac{1}{518,400}$ QQ aequalia 1, et latus lateri aequatur, fitque $\frac{1}{720}$ Q aequale 1. Est autem unitas quadratus. Quod si etiam $\frac{1}{720}$ Q quadratus esset, soluta fuisset quaestio. Non est autem. Eo igitur redactus sum, ut inveniam tria triangula rectangula, ut solidus sub perpendicularis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum * cujus latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum unius triangulorum. Et si omnia diviserimus per productum ex lateribus circa rectum inventi rectanguli, oriatur qui fit ex producto laterum circa rectum secundi in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si unum ipsorum statuamus 3, 4, 5, eo devotum est ut inveniantur duo triangula rectangula ut productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa

Εὐρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετραγώνον. τετάρθῃ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δ' ἄ. καὶ ζητούμεν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος ἂ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἂπὸ πάντος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκτίθεται τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογωνία, καὶ λαβὼν τὸν ὑπὸ μιᾶς τῶν [περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνον] μερίζω εἰς τὸν ὑπὸ τῆς λοιπῆς τῶν [περὶ τὴν] ὀρθῆς, καὶ εὐρίσκωμεν τοὺς τετραγώνους. ἔνα μὲν δ' ἔστω, τὸν δὲ ἕτερον δ' $\overline{\kappa\epsilon\iota\alpha\delta}$, τὸν δὲ τρίτον δ' $\overline{\xi\sigma\sigma\epsilon'}$, καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ δ' ἂ ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσῶσαι δ' ἄ. γίνεται δὲ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κ' κ' ἄ. δ' $\overline{\rho\upsilon\alpha\beta\epsilon'}$, ταῦτα ἴσα δ' ἄ. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ παρὰ δύνανται γίνεται δ' δ' ἄ. $\overline{\rho\upsilon\alpha\beta\epsilon'}$ ἴσα μ' ἄ. καὶ ἡ πλευρὰ τῆς πλευρῆς, γίνεται δ' $\overline{\rho\chi\beta\epsilon'}$ ἴσα μ' α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετραγώνος, εἰ ἣν τετραγώνος καὶ τὰ δ' $\overline{\rho\chi\beta\epsilon'}$, λελομένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὐρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογωνία, ὅπως ἐκ τῶν τριῶν καθέτων αὐτῶν στερεὸς πολλὰπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ τετραγώνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἐνὸς τῶν ὀρθογωνίων, καὶ ἔαν πάντα παρὰλλῶμεν παρὰ τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ εὐρημένου ὀρθογωνίου γενήσεται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἄ δ' ἐπὶ τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἕτερου τῶν τριγώνων, καὶ ἔαν ταῖς ὡς ἐν αὐτῶν $\overline{\eta}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\epsilon}$, ἀπάγεται εἰς τὸ εὐρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογωνία, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ

rectum sit 12N. Proinde et area areae 12. Si autem 12 et 3. Hoc autem facile est et est simile huic 9. 40. 41. Alterum * 5. 12. 13. (* *legendum est* 8. 15. 17). Habentes ergo tria triangula rectangula, revertamur ad initio propositum. Et statuamus trium quassitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. et si solidum ex his aequemus 1Q, fiet 1N rationalis. Ad positiones. *

τὴν ὁρθὴν γ' εἰς $\bar{\alpha}\beta$. ὥστε καὶ ἑμβάδιον ἐμβα-
δου $\bar{\alpha}\beta$. εἰ δὲ $\bar{\alpha}\beta$ καὶ $\bar{\gamma}$. τοῦτο δὲ ῥαδιον καὶ
ἐστὶν ὁμοιον τῷ $\theta\beta$ (θ *latic.*) μ . $\mu\alpha$. τὸ δὲ
ἕτερον $\bar{\epsilon}$. $\bar{\alpha}\beta$. $\bar{\gamma}$. ἔχοντες οὖν τὰ τοιαῖα τρι-
γωνα ὁρθογωνία ἐρχόμεθα εἰς τὸ εἶς ἀρχῆς.
τάσσομεν τῶν ζητούμενων τριῶν τετραγώ-
νων, ὃν μὲν θ , ὃν δὲ $\kappa\epsilon$, ὃν δὲ $\pi\alpha$. καὶ ἐν
τῶν ἐκ τῶν δ . $\bar{\epsilon}$ σπερδὸν ἰσώσωμεν $\delta\gamma$. γενη-
σεται θ δ ὅτι $\delta\gamma$, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

Methodum Diophanti, quam non percepit Bachetus (¹), ita restituo
et explico.

Quoniam primum triangulum est : 3, 4, 5, et rectangulum sub lateribus : 12, cò decentum est, inquit Diophantus, ut inveniantur duo trian- gula ut productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum sit duodecuplus; et ratio est quia tunc productus ex lateribus unius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus similis 12, atque ideo eorum mutuà multiplicatione fiet qua- dratus, quod vult propositio.

Sequitur Diophantus : *Proinde et area area* $12(2)$, quod per se clarum est. Deinde : *Si autem* 12 , *et* 3 , quia, dividendo 12 per quadratum 4 , fit 3 , et semper in multiplicatione oritur quadratum; nam quadratum, divisum per quadratum, facit quadratum.

Reliqua Diophanti non praestant propositum, sed ita restituemus.

(4) Il s'agit de trouver trois triangles rectangles en nombres (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , (a_3, b_3, c_3) tels que l'on ait, a_1, a_2, a_3 étant les hypoténuses, $\frac{b_1 b_2 b_3}{c_1 c_2 c_3}$ dans un rapport carré.

Prenant arbitrairement le triangle (a_1, b_1, c_1) , soit $(5, 4, 3)$ dans l'exemple choisi, Bachet forme les triangles suivants, respectivement des nombres a_1, b_1 et a_1, c_1 , c'est-à-dire il pose de fait :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - b_1^2, & b_2 &= a_1^2 - b_1^2 = c_1^2, & c_2 &= 2a_1b_1, \\ a_3 &= a_1^3 - c_1^2, & b_3 &= a_1^3 - c_1^2 = b_1^3, & c_3 &= 2a_1c_1. \end{aligned}$$

d'ou

$$\frac{b_1 b_2 b_3}{c_1 c_2 c_3} = \left(\frac{b_1}{2a_1} \right)^2.$$

Les deux triangles ainsi construits sont (41, 9, 40) et (34, 16, 30). Au lieu du second, il prend le semblable (17, 8, 15), le rapport restant le même.

(²) Entendez *duodecupla*, et à la ligne suivante : *Si autem duodecupla, et tripla.*

In hoc casu (¹), fingatur triangulum abs 7 et 2, alterum vero abs 5 et 2; et primum triangulorum erit triplum ad secundum, et duo proposito satisfacient. *Regula autem generalis inveniendi duo triangula rectangula in ratione data hæc est :*

Sit data ratio R ad S, majoris ad minus. Majus triangulum formabitur abs

$$R \text{ bis} + S \quad \text{et} \quad R - S;$$

minus vero abs

$$R \div S \text{ bis} \quad \text{et} \quad R - S.$$

Aliter.

Formetur primum	triangulum abs	$R \text{ bis} + S$	et	$R + S$.
secundum	abs	$S \text{ bis} - R$	et	$R + S$.

Aliter.

Formetur primum	triangulum abs	$R \text{ sexies}$	et	$R \text{ bis} - S$.
secundum	abs	$R \text{ quater} + S$	et	$R \text{ quater} - S \text{ bis}$.

Aliter.

Formetur primum	triangulum abs	$R + S \text{ quater}$	et	$R \text{ bis} - S \text{ quater}$.
secundum	abs	$S \text{ sexies}$	et	$R - S \text{ bis}$.

Ex jam dictis deduci potest *methodus inveniendi tria triangula rectangula in proportionem trium datorum numerorum, modò duo dati numeri reliqui sint quadrupli*.

Sint, verbi gratia, dati tres numeri R, S, T, et sint ipsi R, T simul quadrupli S. Formabuntur sic tria triangula :

primum	abs	$R + S \text{ quater}$	et	$R \text{ bis} - S \text{ quater}$.
secundum	abs	$S \text{ sexies}$	et	$R - S \text{ bis}$.
tertium	abs	$S \text{ quater} + T$	et	$S \text{ quater} - T \text{ bis}$.

Sumpsimus autem R esse majorem T.

¹) Les triangles de Diophante ou de Bachet s'obtiennent par la seconde solution de Fermat, c'est-à-dire avec les couples générateurs 5, 4 et 4, 1. Diophante avait probablement traité, dans un problème perdu, la construction de deux triangles rectangles dont l'aire soit dans un rapport donné.

Hinc etiam elicietur *modus inveniendi tria triangula rectangula numero, quorum areae constituent triangulum rectangulum.*

Eo enim deducetur quæstio ut inveniatur triangulum ejus basis et hypotenusa sint quadruplæ perpendiculi. Hoc autem est facile et erit triangulum simile huic :

$$17, \quad 15, \quad 8.$$

Tria vero triangula sic formabuntur :

primum	abs	49	et	2,
secundum	abs	47	et	2,
tertium	abs	48	et	1.

Hinc etiam elicietur *modus inveniendi tria triangula quorum areae sint in ratione trium quadratorum datorum, quorum duo sint quadrupli reliqui, ac proinde poterunt eadem viâ inveniri tria triangula ejusdem areae* ⁽¹⁾; imo et infinitis modis possumus *construere duo triangula rectangula in data ratione*, ducendo unum ex terminis aut utrumque in quadrata data, etc.

XXX (p. 151).

(Ad quæstion. XXV Libr. V.)

Invenire tres quadratos, ut solidus sub ipsis contentus, quolibet ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1Q, et rursus quadrati qui quærantur, sumantur ex triangulis rectangulis. unus a $\frac{16}{25}$, alter a $\frac{25}{169}$, tertius a $\frac{64}{289}$; statuo eos in quadratis, et manet 1Q, quolibet ipsorum detracto, faciens quadratum. Superest ut solidus sub tribus contentus æquetur 1Q : est autem solidus ille $\frac{25600}{1221025}$ QQ; hoc ergo æquatur 1Q, et omnia per 1Q dividantur, fiunt $\frac{25600}{1221025}$ QQ æqualia 1. Est autem unitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{25600}{1221025}$ QQ esse

Εὐρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τούτων σπερεὶς λείψας ἑκάστων χυτῶν ποιῇ τετραγώνον. τετάρθω ὁ ἐξ χυτῶν σπερεὶς δ' \bar{x} . καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἐνὸς μὲν $\overline{15}^{\frac{1}{2}}$, τοῦ δὲ ἑτέρου $\overline{x\bar{x}}^{\frac{1}{2}}$, τοῦ δὲ $\overline{x\bar{x}}^{\frac{1}{2}}$. τῆσσω χυτούς ἐν δυνάμει, καὶ μένει ἡ δ' \bar{x} λείψει ἑκάστου χυτῶν ποιῶσα τετραγώνον. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν σπερεὶν ἴσῶσαι δυνάμει \bar{x} . καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν σπερεὶς κυβοκύβων β . $\overline{\xi\zeta}$ ἐν μορίῳ $\overline{\beta\kappa\beta}$. $\overline{\chi\chi\bar{x}}$. ταῦτα ἴσα δυνάμει \bar{x} . καὶ πάντα παρὰ δύνανται μίαν γίνεσθαι δ' β . $\overline{\xi\zeta}$, ἐν μορίῳ $\overline{\beta\kappa\beta}$. $\overline{\chi\chi\bar{x}}$, ἴσα $\mu^o \bar{x}$. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλεονεχὴν ἔχουσα

(1) Voir Observation XXIII.

quadratum latus habentem quadratum. Rursus itaque res eo est reducta ut inveniantur tria triangula rectangula, ut solidus sub perpendicularis ductus in solidum sub hypotenensis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum. * Et si omnia dividamus per productum ex hypotenusa in perpendicularum unius rectangulorum, oportet oriatui qui fit ex producto hypotenuse in perpendicularum, aliusque rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendicularum alterius, esto unum rectangulorum 3. 4. 5. Eo itaque devotum est, ut inveniantur duo triangula rectangula, ut numerus hypotenuse et perpendiculari, numeri hypotenuse et perpendiculari sit 20. Si autem 20 et 5, et est facile, quippe majus est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo querenda sunt alia duo, ut numerus hypotenuse et perpendiculari sit 6, est autem majoris hypotenusa $6\frac{1}{2}$, perpendicularum 60. Minoris autem hypotenusa $2\frac{1}{2}$, qui vero in uno rectangulorum 12, et accipientes minima similia, recurrimus ad propositum initio, et ponimus solidum sub tribus contentum 1Q, ipsorum autem quadratorum alterum 16Q, alterum 576Q, tertium $\frac{1}{283561}Q$. Superest ut solidus sub tribus aequetur 1Q, et omnia in 1Q, latusque lateri aequetur, et invenietur 1N.65. Ad positiones. *

τετραγώνον. δεήσει ἄρα καὶ δ' ὁ β. $\frac{3}{5}$, ἐν μορίῳ ρκβ. ἄρα, εἶναι τετραγώνον πλευρὰν ἔχοντα τετραγώνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὐρεῖν τρεῖς τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν καθέτων στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ὑποτείνουσῶν στερεόν, ποιῇ τετραγώνον πλευρὰν ἔχοντα τετραγώνον, * καὶ ἐν παντί παρὰβλεψόμεν παρὰ τὸν τῆς ὑποτείνουσῆς καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογώνιων, δεήσει τοῦ ὑποτείνουσῶν καὶ καθέτου τοῦ ὑποτείνουσῆς, καὶ καθέτου πολλαπλασιασθέντα κατὰ τὸν ὑποτείνουσῆς καὶ καθέτου ὀρθογώνου τινός, ἔστω τὸ ἐν τῶν ὀρθογώνων γ. δ. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὐρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτείνουσῆς καὶ καθέτου τοῦ ὑποτείνουσῆς, καὶ καθέτου γ. δ. εἰ δὲ κ. καὶ ε. καὶ ἔστι ῥαδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μετίζον ε. β. ιγ. τὸ δὲ ἑλάττω γ. δ. ε. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτείνουσῆς καὶ καθέτου γ. δ. μὲν μετίζονος ὑποτείνουσα μ. ζ. ἔστι δὲ τοῦ μὲν μετίζονος ὑποτείνουσα μ. ζ. α. ἡ δὲ καθέτος ζ. τοῦ δὲ ἐλάττωτος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτείνουσῃ μ. β. α. ὁ δὲ ἐν τῇ α. τῶν ὀρθογώνων β. καὶ λαθόντες τὰ ἐλάττωτα τῶν ὁμοίων ἀνατρέχουμεν εἰς τὸ εἶ ἄρ/ῆς, καὶ τάσσομεν τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δ' α. αὐτῶν δὲ τῶν τετραγώνων, ὃν μὲν δ' ιε, ὃν δὲ δ' φς, ὃν δὲ δ' α ἐν μορίῳ β. γ. δ. ε. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δ' α. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ, καὶ εὐρίσκειται ὁ ζ. ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

Ad elucidationem et explicationem questionis 25 juxta methodum Diophanti, quam Bachetus similiter prætermisit (¹), querenda sunt duo triangula rectangula ut productus sub hypotenusa et perpendicularo unius

(¹) Bachet se propose de trouver trois triangles rectangles (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , (a_3, b_3, c_3) tels que le rapport $\frac{a_1 a_2 a_3}{c_1 c_2 c_3}$ soit carré. A cet effet, il prend arbitrairement le

ad productum sub hypotenusa et perpendicularo alterius habeat rationem datam.

Quæ sane quæstio diu nos torsit et vere difficillimam quilibet tentando experietur, sed tandem patuit generalis ad ipsius solutionem methodus.

premier triangle, en sorte toutefois que $2c_1 = b_1$; il forme le second en posant

$$a_2 = \frac{4c_1^2 + b_1^2}{b_1}, \quad b_2 = \frac{4c_1^2 - b_1^2}{b_1}, \quad c_2 = 4c_1,$$

et le troisième en prenant

$$a_3 = a_1 a_2, \quad b_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_3 = c_1 c_2 - b_1 b_2.$$

On a alors, d'une part,

$$a_1 a_2 a_3 = (a_1 a_2)^2;$$

de l'autre,

$$c_1 c_2 c_3 = (2b_1 c_1)^2.$$

Fermat a bien reconnu que Diophante, se donnant arbitrairement, par exemple, le troisième triangle (5, 3, 4), cherche les deux autres en sorte que $\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}$ soit dans un rapport donné, à savoir 5. Mais il n'a pas deviné le procédé de l'auteur grec, qui a été restitué par Otto Schulz (*Diophantus von Alexandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen, aus dem Griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet*, Berlin, 1822, p. 546-551) d'après le texte donné par Bachet.

Diophante prend d'abord deux triangles auxiliaires $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, tels que $\beta_1 \gamma_1$ soit à $\beta_2 \gamma_2$ dans le rapport donné. Ces deux triangles, obtenus comme dans le problème précédent V, 24, sont d'ailleurs (13, 12, 5) et (5, 4, 3).

D'autre part, ayant un triangle (α, β, γ) , Diophante sait construire un triangle (a, b, c) tel que $ac = \frac{\beta^2}{\gamma}$. Il prend à cet effet

$$a = \frac{1}{2} \alpha, \quad b = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}, \quad c = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Du triangle (13, 12, 5) il déduit de cette façon le triangle $(6\frac{1}{2}, \frac{119}{26}, \frac{60}{13})$, et du triangle (5, 4, 3), le triangle $(\frac{5}{2}, \frac{7}{10}, \frac{12}{5})$. Les deux triangles ainsi formés satisfont évidemment à la condition imposée.

Pour achever le problème primitif, Diophante prend pour les trois carrés cherchés

$$\left(\frac{c_1}{a_1}x\right)^2, \quad \left(\frac{c_2}{a_2}x\right)^2, \quad \left(\frac{c_3}{a_3}x\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{14400}{28561}x^2, \quad \frac{526}{625}x^2, \quad \frac{16}{9}x^2$$

et, égalant leur produit à x^2 , il tire pour x la valeur $\frac{65}{18}$.

Quærantur duo triangula ut rectangulum sub hypotenusa unius et perpendicularo rectanguli sub hypotenusa alterius et perpendicularo sit duplum.

Figatur unum ex triangulis ab A et B, alterum ab A et D. Rectangulum sub hypotenusa prioris et perpendicularo erit

$$B \text{ in } A \text{ cubum bis} + B \text{ cubo in } A \text{ bis};$$

rectangulum vere sub hypotenusa posterioris et perpendicularo erit

$$D \text{ in } A c. \text{ bis} + D c. \text{ in } A \text{ bis.}$$

Quum igitur $B \text{ in } A c. \text{ bis} + B c. \text{ in } A \text{ bis}$ sit duplum rectanguli $D \text{ in } A c. \text{ bis} + D c. \text{ in } A \text{ bis}$, ergo

$$B \text{ in } A c. + B c. \text{ in } A = \text{aquabitur} = D \text{ in } A c. \text{ bis} + D c. \text{ in } A \text{ bis,}$$

et, omnibus abs A divisis, fiet

$$B \text{ in } A q. + B c. = \text{æquale} = D \text{ in } A q. \text{ bis} + D c. \text{ bis,}$$

et, per antithesin,

$$D c. \text{ bis} - B c. = \text{æquabitur} = B \text{ in } A q. - D \text{ in } A q. \text{ bis.}$$

Si igitur $D c. \text{ bis} - B c.$, divisum per $B - D \text{ bis}$, æquetur quadrato, soluta erit questio.

Quærendi igitur duo numeri, loco ipsorum B et D, ea conditione ut duplum cubi unius, minus alio, divisum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum posterioris minus primo, faciat quadratum (1).

Ponatur unus esse $1N + 1$, alter 1.

Cubus duplus prioris minus cubo a posteriore facit

$$1 + 6N + 6Q + 2C.$$

Duplus autem posterioris minus priore facit

$$1 - 1N.$$

(1) On voit qu'au lieu de déterminer B et D en sorte que $\frac{2D^3 - B^3}{B - 2D}$ soit carré, Fermat va les chercher, par erreur, en sorte que $\frac{2D^3 - B^3}{2B - D}$ soit carré. Plus loin, après avoir reconnu la faute de calcul qu'il a commise, il laisse subsister sa solution comme s'appliquant en tout cas à un problème digne d'intérêt.

Ergo, si ducas $\overline{1 + 4N}$ in $\overline{1 + 6N + 6Q + 2C}$, fiet quadratus. Productum illud æquatur

$$1 + 5N + 4C + 2QQ, \quad \text{quod æquandum quadrato ab } \frac{5}{2}N + 1 + \frac{25}{8}Q,$$

et omnia statim constabunt.

Propositio autem ad omnes rationes extendetur si, loco unius ex quærendis numeris, ponatur $4N$ plus excessu majoris rationis termini supra minorem et, loco alterius, ille ipse excessus, ut jam a nobis in ratione dupla est factum. Hac quippe ratione semper unitatum numerus evadet quadratus et æquatio erit proclivis; hoc peracto invenientur duo numeri qui ipsos B et D representabunt, et ad primam quæestionem fiet reditus.

Retractanti quæ hucusque ad 25^{am} quæestionem scripsimus, visum erat statim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non convenit quæstioni nostræ: quia tamen quæestionem aliam, ad quam male præsens problema adduxeramus, recte construximus, non tam operam perdidimus quam male collocavimus, et ideo maneat scriptura marginalis intacta.

Quæestionem ipsam Diophanteam novo iterum examini subjicientes et methodum nostram sedulo consulentes, *tandem generaliter solvimus*: exemplum tantum subjiciemus, confisi numeros ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi.

In propositione Diophanti quærenda duo triangula rectangula eà conditione ut productum sub hypotenusa unius et perpendicularo ad productum sub hypotenusa et perpendicularo alterius habeat rationem quam 5 ad 1.

En duo illa triangula,

primum, ejus hypotenusa	48 543 669 109,
basis	36 083 779 309,
perpendicularum	32 472 275 580,
secundum, ejus hypotenusa	42 636 752 938,
basis	41 990 695 480,
perpendicularum	7 394 200 038.

quolibet termino æquando reperiantur unitates tantum quadratæ et numeri. Recurrendum igitur ad ea quæ diximus ad quæstionem 24 Libri VI.

XXXII (p. 257).

(Ad quæstion XXXI Libr. V.)

Dato numero tres adinvenire quadratos, quorum bini sumpti detracto dato numero faciant quadratum.

Quo artificio in superiore quæstione uti sumus, ut quatuor numeros inveniremus quorum bini sumpti adscito dato numero conficerent quadratum, simili in hac quæstione uti possumus, ut *inveniantur quatuor numeri quorum bini sumpti detracto dato numero conficiant quadratum.*

Ponendus enim : primus $+Q$ + numero dato; secundus quadratus primus ex inventis in hac quæstione unâ cum duplo ab ipsius latere in X ; et reliqua patent.

XXXIII (p. 258).

(Ad quæstion. XXXII Libr. V.)

Invenire tres quadratos, ut compositus ex ipsorum quadratis faciat quadratum.

Cur autem non quærat *duo quadratoquadratos quorum summa sit quadratus*? Sane hæc quæstio est impossibilis, ut nostra demonstrandi methodus potest haud dubie expedire.

XXXIV (p. 257).

(Ad commentarium in quæstion. III Libr. VI.)

QUESTIO DIOPHANTI. — Invenire triangulum rectangulum, ut area ejus numerus, adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 5.

BACHETUS..... Quoniam vero hinc fortè venit in mentem Francisco Viætæ ⁽¹⁾ quæstionem

⁽¹⁾ VIËTE, *Zeteticum* V, 9 (édition Schooten, p. 79) :

Invenire numero triangulum rectangulum, cujus area adjuncta dato plano ex duobus quadratis composito, conficiat quadratum.

Sit datum planum Z , planum compositum ex B quadrato et D quadrato. Effingatur trian-

applicari posse solis numeris qui e duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in sua hypothesi sumpserat 5, e duobus quadratis compositum; quamvis ex ipso ductu analyseos Diophanteæ satis constet ad quilibet numerum extendi problema, ne quis tamen supersit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare....

Error Vietæ inde haud dubie oritur. Supposuit vir clarissimus differentiam duorum quadratoquadratorum, ut $1QQ - 1$, æquari aræ, cui adjiciendo quintuplum quadrati, fiat quadratus.

Si 5, numerus datus, dividatur in duos quadratos, poterit inveniri quintuplum quadrati a quo, dempta unitate, supersit quadratus. Ponatur igitur latus quadrati quintuplicandi esse $1N + 1$, aut alius quivis numerorum numerus $+ 1$. Quintuplum quadrati illius erit

$$5Q + 10N + 5,$$

cui, si adjicias aræam, $1QQ - 1$, fiet

$$1QQ + 5Q + 10N + 4,$$

quæ summa debet æquari quadrato. Hoc autem non est operosum, quum numerus unitatum, ex hypothesi adjecta problemati, sit quadratus.

Non vidit Vietæ questionem perinde resolvi posse si, loco $1QQ - 1$, sumpsisset pro aræa $1 - 1QQ$: eo enim deducenda statim questio ut datus numerus, 5 vel 6 vel alius quilibet, in quadratum ductus, adjectâ unitate, conficiat quadratum; quod generaliter est facillimum, quum unitas sit quadratus.

zulum rectangulum abs quadrato aggregati laterum B, D, et quadrato differentie eorumdem. Hypotenusa igitur similis erit B quad. quad. $2 = B$ quad. in D quad. $12 + D$ quad. quad. 2. Basis B in D in Z planum 8. Perpendicularum $B + D$ quadrato in $B - D$ quadratum 2. Adplicentur omnia ad $B + D$ in $B - D$ quad. 2, fiet aræa similis $\frac{Z \text{ plano in } B \text{ in } D, 2}{B - D \text{ quad.}}$. Adde Z planum: quoniam $B - D$ quad. $+ B$ in D 2 æquatur B quadrato $+ D$ quadrato, id est æquatur Z plano, summa erit $\frac{Z \text{ planoplanum}}{B - D \text{ quad.}}$, quadratum a radice $\frac{Z \text{ plani}}{B - D}$.

Sit Z planum 5, D1, B2. Triangulum rectangulum erit huiusmodi: $\frac{82}{6}, \frac{86}{6}, \frac{18}{6}$. Aræa $\frac{720}{36}$, id est 20. Adde 5. Summa fit 25, ejus radix est 5.

Nos peculiari methodo ⁽¹⁾ quæstionem hanc et duas proximas ⁽²⁾ resolvimus, cujus beneficio, dum quærimus triangulum cujus area, unâ cum 5, verbi gratia, conficiat quadratum, triangulum in minimis ⁽³⁾ exhibemus

$$\frac{9}{3}, \quad \frac{40}{3}, \quad \frac{41}{3},$$

cujus area 20, addito 5, facit quadratum 25. Sed de ratione et usu nostræ hujus methodi non est hujus loci plura addere; non sufficeret sane marginis exiguitas, multa enim habemus huc referenda.

XXXV (p. 289).

(Ad quæstion. VI Libr. VI.)

Invenire triangulum rectangulum ut numerus areae, adsumens unum laterum circa rectum, faciat datum numerum.

⁽¹⁾ La méthode de Diophante peut se représenter comme suit : soient a le nombre donné, et

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)y, \quad \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)y, \quad 2y$$

le triangle cherché, on devra rendre carré $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)y^2 + a$. En égalant cette expression à $\left(x + \frac{2m^2a}{x}\right)^2$, on arrive à tirer rationnellement, en fonction d'arbitraires m et n ,

$$x = \frac{a(4a^2m^4 + 1) - n^2}{4amn} \quad \text{et} \quad y = \frac{ax}{2max + n}.$$

⁽²⁾ DIOPHANTE, VI, 4 : *Invenire triangulum rectangulum ut areae numerus multatus dato numero faciat quadratum.*

DIOPHANTE, VI, 5 : *Invenire triangulum rectangulum ut numerus areae detractus a dato numero faciat quadratum.*

La méthode de Diophante, pour ces deux problèmes, est analogue à celle qu'il a suivie pour VI, 3.

⁽³⁾ De fait, ces nombres reviennent à ceux de Viète. Comparez au reste JACQUES DE BILLY (*Doctrinæ analyticæ inventum novum*, I, 37, p. 16) :

« Vieta, L. V Zetet. 9, infeliceiter solvit quæstionem tertiam libri sexti Diophanti; quum enim iste proponat invenire triangulum rectangulum cujus area assumens datum numerum faciat quadratum, coarctavit Vieta quæstionem ad datum numerum ex duobus quadratis compositum. At Fermatius innumeris modis solvit problema de dato quocunque numero : si enim detur 3, numeri sequentes exhibent triangulum quæsitum :

$$\frac{1}{416} \frac{441}{160}, \quad \frac{1}{416} \frac{397}{160}, \quad \frac{34}{40}.$$

Hæc propositio et sequentes aliter fieri possunt ⁽¹⁾ :

Fingatur triangulum, in hac propositione, abs dato numero et unitate, et plana lateribus similia applicentur ad summam unitatis et numeri dati, orietur quæsitus triangulus.

XXXVI (p. 299).

(Ad quæstion. VII Libr. VI.)

Invenire triangulum rectangulum, ut numerus area, multatus uno laterum circa rectum, faciat datum numerum.

Fingatur triangulum abs dato numero et unitate, et plana lateribus similia applicentur ad differentiam dati numeri et unitatis ⁽²⁾.

Hæc quæstio ⁽³⁾, per viam qua hujusmodi duplicatas æqualitates infinitis modis resolvimus, infinitas recipit solutiones; modum autem quo utimur tetigimus et explicavimus infra ad quæstionem 24.

Imo et solutiones illæ infinitæ aptantur quatuor sequentibus quæstionibus ⁽⁴⁾, quod nec Diophantus nec Bachetus animadvertit. Cur

⁽¹⁾ Soit a le nombre donné; la solution de Diophante revient à prendre, pour le triangle,

$$\frac{a^2+1}{a-1}, \quad a-1, \quad \frac{2a}{a+1}.$$

Loire, plus le dernier côté, est identiquement a .

La solution de Fermat est précisément la même; seulement il la pose directement, au lieu de suivre les longs détours de Diophante, qui masquent la construction effective du triangle.

⁽²⁾ Cette solution est encore, de fait, la même que celle de Diophante, comme pour le problème précédent.

⁽³⁾ Il faut entendre ici à la fois les problèmes VI, 6 et 7 de Diophante.

⁽⁴⁾ VI, 8 : *Invenire triangulum rectangulum ut area, adsumens utrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum.*

VI, 9 : *Invenire triangulum rectangulum, ut numerus area, multatus summi laterum circa rectum, faciat datum numerum.*

VI, 10 : *Invenire triangulum rectangulum ut area numerus, adsumens summam hypotenuse et alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum.*

VI, 11 : *Invenire triangulum rectangulum ut numerus area, multatus summi hypotenuse et alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum.*

Pour tous ces problèmes, comme pour les deux précédents, Diophante arrive à une double équation, dont son procédé ne tire qu'une solution unique.

autem neque Diophantus neque Bachetus sequentem questionem addiderunt?

Invenire triangulum rectangulum ut unum ex lateribus areâ multatum faciat datum numerum.

Certe hanc videntur ignorasse, quia non statim se prodit in resolutione duplicatæ æqualitatis; verum ex nostra methodo facile potest inveniri.

Similiter in sequentibus questionibus tertius hic casus suppleri potest (¹).

XXXVII (p. 292).

(Ad quæstiones VIII et IX Libri VI.)

Addi potest ex nostra methodo sequens quæstio :

Invenire triangulum rectangulum ut summa laterum multata areâ conficiat datum numerum.

XXXVIII (p. 294).

(Ad quæstiones X et XI Libri VI.)

Addi potest ex nostra methodo sequens quæstio :

Invenire triangulum rectangulum ut summa hypotenuse et alterius lateris circa rectum, multata areâ, faciat datum numerum.

Imo et sequens addi potest Bacheti commentariis (²) :

Invenire triangulum < rectangulum > ut hypotenusa detractâ areâ faciat datum numerum.

(¹) Voir les Observations XXXVII, XXXVIII, XL, XLI.

(²) Dans son commentaire sur VI. 11, Bachet avait traité la question :

Invenire triangulum rectangulum ut area, detractâ hypotenusa, faciat datum numerum.

XXXIX (p. 298).

(Ad quæstion. XIII Libr. VI.)

Invenire triangulum rectangulum ut numerus areæ, adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum.

Unius tantum speciei triangula Diophantus exhibet propositum adimplentia; sed ex nostra methodo suppetunt infinita diversæ speciei triangula quæ ex Diophanteo per ordinem derivantur.

Sit igitur inventum triangulum 3.4.5, cujus hæc est proprietas « ut qui fit mutuo ductu laterum circa rectum, adscito solido sub majore laterum circa rectum, intervallo eorundem, et areâ contento, faciat quadratum ⁽¹⁾ ». Ab eo deducendum aliud ejusdem proprietatis.

Sit majus ex lateribus circa rectum trianguli quæsiti 4; minus vero $3 + 1N$. Rectangulum sub lateribus circa rectum, adscito solido sub majore laterum circa rectum, intervallo eorundem, et areâ contento, facit

$$36 + 12N + 8Q, \quad \text{quæ ideo debent æquari quadrato.}$$

Quum autem latera, 4 et $3 + 1N$, sint latera circa rectum trianguli rectanguli, debent etiam eorum quadrata juncta æquari quadrato; quadrata illa juncta faciunt

$$25 + 6N + 1Q, \quad \text{quæ idcirco etiam æquanda quadrato.}$$

(1) Cette condition est empruntée au texte latin du problème. Le procédé de Diophante revient en effet à prendre comme triangle cherché : az , bz , cz ; puis à poser (supposant $b > c$) $z = \frac{b}{x^2 - \frac{bc}{2}}$. Il arrive ainsi à avoir à rendre carré

$$bcx^2 - b(b+c)\frac{bc}{2} = y^2.$$

Or, si le triangle (a, b, c) est tel que

$$bc + b(b+c)\frac{bc}{2} = p^2,$$

Diophante sait construire une infinité de valeurs de $x = \frac{q^2 - 2pq - bc}{q^2 - bc}$, donc de z . Mais tous les triangles ainsi obtenus sont semblables; Fermat cherche donc à déterminer un autre triangle (a, b, c) que celui trouvé par Diophante (5, 4, 3).

Et oritur duplicata æqualitas, nam

$$36 + 12N + 8Q \quad \text{et etiam} \quad 25 + 6N + 4Q$$

debent æquari quadrato. Ejus æqualitatis duplicatæ solutio est in promptu.

XL (p. 302).

(Ad quæstion. XIV Libr. VI.)

Invenire triangulum rectangulum ut numerus areae, multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum.

Ex nostra methodo solvetur sequens quæstio, alioquin difficillima :

Invenire triangulum rectangulum ut alterutrum laterum circa rectum, multatum area, faciat quadratum.

XLI (p. 307).

(Ad quæstiones XV et XVII Libri VI.)

15. Invenire triangulum rectangulum ut numerus areae, tam hypotenusâ quam altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum.

17. Invenire triangulum rectangulum ut numerus areae, tam hypotenusæ quam alterius laterum circa rectum numero adscito, faciat quadratum.

Tentetur beneficio nostræ methodi sequens quæstio, alioquin difficillima :

Invenire triangulum rectangulum ut tam hypotenusâ quam unum ex lateribus, detractâ area, faciant quadratum.

XLII (p. 320).

(Ad quæstion. XIX Libr. VI.)

Invenire triangulum rectangulum ut areae numerus cum hypotenusæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus....

...Oportet itaque invenire quadratum aliquem, qui, binario adjecto, cubum faciat . . . est igitur quadrati latus 5, cubi vero 3; ipse quadratus 25, cubus 27....

An autem alius in integris quadratus, præter ipsum 25, inveniatur

qui adsumpto binario cubum faciat, id sane difficilis primo obtutu videtur disquisitionis. Certissimâ tamen demonstratione probare possum nullum alium quadratum, præter 25, in integris adjecto binario facere cubum. In fractis ex methodo Bacheti ⁽¹⁾ suppetunt infiniti, sed doctrinam de numeris integris, quæ sane pulcherrima et subtilissima est, nec Bachetus, nec alius quivis cujus scripta ad me pervenerint, hæcenus calluit.

XLIII (p. 329).

(Ad commentarium in quæstion. XXIV Libr. VI.)

QUESTIO DIOPHANTI. — Invenire triangulum rectangulum ut numerus circumferentie sit cubus, et adseito arce numero, faciat quadratum.

BACHETUS.... Quoniam verò in his libris Diophantus diversimode utitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, si omnes quos usurpat modos sigillatim recenseam et unum in locum quæ sparsim a nobis adnotata sunt, collecta conjiciam, ut sic tota duplicatæ æqualitatis doctrina discentium animis firmitus inhaereat. Nec solas Diophanti hypotheses afferemus, sed et alias plerumque exhibebimus, quibus varia hujusmodi æquationum symptomata declarentur, novamque insuper quam excogitavimus æquationis rationem, quamque ad quadragesimam quintam quarti explicavimus, aliis adiciemus.

Ubi non sufficiunt duplicatæ æqualitates vel διπλασιάζουσες, recurrendum ad τριπλασιάζουσες seu triplicatas æqualitates, quæ est nostra inventio, ad plurima problemata pulcherrima præviam faciem præferens.

$$\text{Equentur videlicet quadrato} \begin{cases} 1N = 4, \\ 2N = 4, \\ 5N = 4, \end{cases}$$

oritur triplicata æqualitas cujus solutio per medium duplicatæ æqualitatis est in promptu.

(1) D'après cette méthode (p. 324), si l'on a une solution x_1, y_1 de l'équation indéterminée

$$x^2 + a = y^3$$

et que l'on pose

$$x = x_1 + z, \quad y = y_1 + \frac{2x_1}{3}z,$$

on peut tirer z rationnel

$$z = \frac{36x_1^2 - 27y_1^3}{8x_1^3}.$$

Si ponatur, loco xN , numerus unà cum 4 quadratum efficiens, verbi gratia, $xQ + 4N$, fiet

$$\begin{array}{ll} \text{primus numerorum aequandorum quadrato} & xQ + 4N + 4; \\ \text{secundus igitur erit} & 2Q + 8N + 4, \\ \text{tertius} & 5Q + 20N + 4. \end{array}$$

Primus autem, ex constructione, est quadratus : ergo debent aequari quadrato

$$2Q + 8N + 4 \quad \text{et} \quad 5Q + 20N + 4,$$

et oritur duplicata aequalitas quae unicam certe exhibebit solutionem ⁽¹⁾, sed eà exhibità prodibit rursus nova, et a secundà tertia deducetur, et in infinitum.

Quod opus ita procedet ut, invento valore xN , rursus ponatur xN esse $xN +$ numero qui primum ipsi xN inventus est aequalis. Hac enim viâ infinite prioribus solutionibus solutiones accedent et postrema semper derivabitur a proxime antecedenti.

Hujus inventionis beneficio infinita triangula ejusdem areae possumus exhibere ⁽²⁾, quod ipsum videtur latuisse Diophantum, ut patet ex questione octava Libri V, in qua tria tantum triangula aequalis areae investigat ut sequentem questionem in tribus numeris construat, quae ad infinitos, ex iis quae nos primi deteximus, recipit extensionem.

⁽¹⁾ D'après les procédés de Diophante, cette solution s'obtient comme suit :

Soit la double équation

$$ax^2 + bx + c^2 = u^2, \quad a'x^2 + b'x + c^2 = v^2,$$

on en conclut

$$(a - a')x^2 + (b - b')x = u^2 - v^2.$$

On satisfera à cette relation en posant

$$2c \frac{a - a'}{b - b'} x + 2c = u + v, \quad \frac{b - b'}{2c} x = u - v.$$

De ces deux équations on tirera la valeur de u ou de v , et, en substituant dans une des deux premières, on obtiendra pour x une valeur rationnelle déterminée.

⁽²⁾ Voir Observation XXIII. Fermat renvoie d'ailleurs à la présente Observation XLIII dans les suivantes : VI, XVI, XXII, XXXI.

XLIV (p. 333).

(Ad idem commentarium.)

Hinc de duplicatis aequalitatibus tractatui multa possemus adjungere quae nec veteres nec novi defexerunt. Sufficit nunc, ut methodi nostrae dignitatem et usum asseramus, ut questionem sequentem, quae sane difficillima est, resolvamus.

Invenire triangulum rectangulum numero, cujus hypotenusa sit quadratus, et pariter summa laterum circa rectum ⁽¹⁾.

Triangulum quaesitum representant tres numeri sequentes :

$$4687\ 298\ 610\ 289, \quad 4565\ 486\ 627\ 761, \quad 1061\ 652\ 293\ 520.$$

Formatur autem a duobus numeris sequentibus :

$$2150\ 405, \quad 246\ 792.$$

Alia autem methodo sequentis questionis solutionem deteximus :

Invenire triangulum rectangulum numero ea conditione ut quadratum

⁽¹⁾ BILLY (*Doctrinae analyticae inventum novum*, I, 23, p. 7) : Quærat, verbi gratia, triangulum rectangulum cujus tam hypotenusa quam summa laterum circa rectum sit numerus quadratus. Formetur triangulum ab obviis numeris $1N + 1$ et $1N$; ergo tria latera erunt : $2Q + 1 + 2N$, $1 + 2N$, $2N + 2Q$. Igitur hypotenusa, $2Q + 1 + 2N$, et summa laterum circa rectum, $2Q + 1 + 4N$, æquantur quadrato, et fit, per methodum communem, valor radicis $= \frac{12}{7}$, unde duo numeri, a quibus formatum est triangulum, erunt $= \frac{5}{7}$ et $= \frac{12}{7}$, seu in integris, accipiendo solos numeratores, $= 5$, $= 12$. Triangulum autem inde formatum est : 169, 119, 120. Unde infero ad solutionem problematis inveniendum esse aliquod triangulum rectangulum cujus hypotenusa sit quadratus, et differentia laterum circa rectum sit quadratus, atque hæc conclusio elicitur vi analyseos præcedentis : istud autem triangulum est 169, 119, 120, quod formatur vel ab $= 5$ et $= 12$, vel a $+ 5$ et $+ 12$. Quare iterò operationem et formo triangulum quæsitum ab $1N + 5$ et 12 , et pervenio tandem ad æquiditatem duplicatam quæ non dabit amplius numeros fictos, sed veros, beneficio trianguli illius primitivi, ut distinctius videbitur infra num. 43....

(*Ibid.*, IV, p. 13). *Invenire duos numeros quorum summa faciat quadratum et quorum quadrata simul posita faciant quadratoquadratum.*

Istud problema idem plane est cum superiori quo quærebatur triangulum rectangulum cujus hypotenusa et summa laterum sit quadratus, aliasque fuit propositum plerisque doctissimis Mathematicis a Fermatio nostro sine solutione. Utere igitur triangulo primitivo supra invento (num. 23) 169, 119, 120, quod formatur ab 5 et 12, et forma triangulum ab $1N + 5$ et 12 . Latera erunt : $1Q + 169 + 10N$, $1Q + 119 + 10N$, $24N + 120$. Igitur

a differentia laterum circa rectum minus duplo quadrati a minore latere conficiat quadratum.

Unum ex triangulis quæ huic quæstioni aptantur est id quod sequitur :

$$1525, \quad 1517, \quad 156;$$

formatur a numeris 39 et 2.

Imo confidenter adjungimus duo triangula rectangula quæ jam exposuimus ad solutionem duarum propositarum quæstionum esse minima omnium in integris quæstionem adimplentium.

Methodus nostra hæc est : Queratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem. Si non succedat solutio post absolutam operationem, quia nempe valor numeri notæ defectûs insignitur et ideo minor esse nihilo intelligitur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus (quæ oscitantia, ut loquitur Vieta (1), fuit et

hypotenusa, $1Q + 169 + 10N$, et summa laterum circa rectum, $1 + 1Q + 34N$, æquantur quadrato; due summam istam laterum in 169; ergo productus, $169Q + 5746N + 169$, cum hypotenusa, $1Q + 169 + 10N$, æquantur quadratis. Ergo (per ea quæ dicta sunt num. 22) valor radicis est $\frac{2048075}{20566}$, et, juxta positiones, duo numeri a quibus nascetur triangulum quæsitum, 4687298610289, 4565486027761, 1061652293520. Nam et hypotenusa est quadratus et summa laterum, et quadrata laterum æquantur quadrato hypotenuse; proindeque duo latera circa rectum sunt duo numeri quæsiti, tum quia illorum summa quadratus est, tum quia horum quadrata simul juncta faciunt quadrato-quadratum....

(*Ibid.*, 22, p. 7) : Iterum sit solvenda æqualitas duplicata : $169Q + 5746N + 169$, et $1Q + 10N + 169$. Tripliciter ista æqualitas solvi potest : Primo accipiendo differentiam terminorum illorum, quæ est $168Q + 5736N$, et eligendo duos producentes in quorum uno sit 26, duplum videlicet lateris quadrati 169; atque hæc est methodus communis. Secundo, solvi potest revocando diversos quadratorum numeros ad eundem, quod fieret ducendo singulas particulas numeri posterioris in 169, ut explicatum est num. 4. Tertio, solvetur eadem æqualitas eligendo producentes $14N$ et $19N + \frac{2868}{7}$; ita enim summa radicum erit $26N$, duplum lateris quadrati 169Q; atque hæc est methodus Fermatiana quæ dat pro valore radicis $\frac{2048075}{20566}$.

La première méthode indiquée par Jacques de Billy donnerait la valeur $\frac{769485031}{3240054600}$; la seconde est illusoire, car elle donne pour valeur zéro.

(1) VIÈTE (*In artem analyticen Isagoge*, cap. I, éd. Schooten, p. 1, l. 23-25) : Forma autem Zetesin incundi ex arte propria est, non jam in numeris suam Logicam exercente, quæ fuit oscitantia veterum *Analystarum*.

ipsius et veterum analystarum), sed iterum quæstionem tentemus et pro valore radicis ponamus $\pm N$ — numero quem sub signo defectûs æquari radici incognitæ in prima operatione invenimus, prodibit nova haud dubie æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis representabit.

Et hac via superiores duas quæstiones alioquin difficillimas resolvimus: demonstravimus pariter et construximus numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos dividi posse ⁽¹⁾, sed hoc per iteratam ter aliquando operationem: sæpius enim contingit ut veritas quæsita ad multiplices operationum iterationes solertem et industrium necessario adigat analystam, ut facillime experiendoprehendes.

APPENDIX ⁽²⁾.

Proposuit feliciter satis plerosque duplicatæ æqualitatis et modos et casus subtilis ille et doctissimus analysta Bachetus ad quæstionem 24^{am} Libri VI Diophanti, sed integram sane non demessuit segetem: quas enim quæstiones unicâ tantum, aut ad summum duplici solutione circumseribit, ad infinitas porrigere et promovere nihil vetat, imo proclivi id exsequi operatione est in promptu.

Proponatur sextus modus quem ipse satis prolixè explicat pag. 439 et 440 ⁽³⁾: casus omnes ab ipso enumerati, ex nostra quam mox exhi-

⁽¹⁾ Voir Observation IX.

⁽²⁾ Ce fragment est tiré du préambule du *Doctrinæ analyticæ inventum novum* de Jacques de Billy (p. 2), où il suit le passage ci-après:

« Quis ex primitivis radicibus elicit derivativas, tum primi gradus, tum secundi, tum tertii et sic deinceps in infinitum? nemo plane: uni Fermatio debetur hoc inventum: unus ille hæc omnia non ex alienis cumulavit operibus, quod rhapsodi quidam facere consueverunt, sed proprio Marte cudit et ex suis ipse fontibus hausit: hoc ille quum mihi amicissime communicasset per literas, judicavi dignissimum quod typis mandaretur, et ne ab ejus mente ullatenus recedam, describendum mihi videtur in primis compendium quoddam totius methodi, cui nomen debet *Appendicis ad dissertationem Claudii Gasparis Bacheti de duplicatis apud Diophantum æqualitatibus*. En ipsissima illius verba. »

⁽³⁾ Pages 332-333 de l'édition de Samuel Fermat. « Sextus modus est quando propositi numeri diversimode componuntur ex Quadratis, Numeris et Unitatibus,

Primo ergo accidit utrumque propositorum numerorum componi ex tribus speciebus supra dictis et eorum intervallum unicâ tantum constare specie. ...

Secundo accidit utrumque propositorum numerorum ex duabus componi speciebus.

bituri sumus methodo, infinitas admittunt solutiones, quæ a prima per iteratas analyses gradatim in infinitum derivantur.

Methodus hæc est : Queratur solutio quæstionis propositæ secundum methodum vulgarem, hoc est secundum methodum Bacheti aut Diophanteam, prodibit statim valor numeri sive radicis ignotæ; quo peracto, iteretur analysis, et, pro valore novæ investigandæ radicis, ponatur una radix plus numero unitatum prioris radicis. Reducetur quæstio ad novam æqualitatem duplicatam, in qua unitates utrimque reperientur quadratæ, propter priorem solutionem; ideoque differentia æquationum ex numeris tantum et quadratis, quæ sunt proximæ inter se species, constabit : quare resolvetur, ex Diophanto et Bacheto, nova hæc duplicata æqualitas. Ex qua, pari artificio, tertia, et ex tertia quarta, et sic in infinitum, deducuntur.

Quod non advertisse aut Diophantum, aut Bachetum, imo et Vietam, dispendium hucusque Analyseos maximum fuit. Sed præcipuum inventionis nostræ artificium in iis se prodit quæstionibus, in quibus primigenia analysis, pro valore incognitæ radicis, exhibet numerum notâ defectûs insignitum, qui ideo minor esse nihilo intelligitur. Methodus autem nostra in hoc casu, non solum in problematis quæ per duplicatas æqualitates solvuntur locum habet, sed generaliter in aliis quibuscumque, ut experiënti notum fiet.

Sic igitur procedit : Queratur etc. (*vide supra*, p. 337, l. 10, *usque ad* repræsentabit, p. 338, l. 5) ⁽¹⁾.

alterum scilicet ex Quadratis et Unitatibus, alterum ex Numeris et Unitatibus, intervallum autem illorum constare ex Quadratis et Numeris....

» Tertio accedit alterum propositorum numerorum componi ex Quadratis, Numeris et Unitatibus, alterum ex Quadratis et Numeris....

» Quarto accedit alterum propositorum numerorum componi ex Quadratis, Numeris et Unitatibus, alterum ex Quadratis et Unitatibus....

» Quinto denique accedit alterum propositorum numerorum componi ex Quadratis, Numeris et Unitatibus, alterum vero ex Numeris et Unitatibus.... »

(¹) BILLY ajoute : « Hactenus Fermatius ». Les différences, pour cet alinéa, entre le texte de l'*Observatio* publié par Samuel Fermat (S) et le texte de l'*Inventum novum* (B) sont les suivantes :

P. 337, l. 12. notâ defectûs insignitur S habet notam defectûs B; 13. intelligitur S deprehenditur B; 14. ut loquitur Vietæ S ut verbis Vietæ utar B.

XLV (p. 338-339).

(Ad problema XX commentarii in ultimam quæstionem Arithmeticorum Diophanti.)

BACHETUS. Invenire triangulum rectangulum, cujus area sit datus numerus. Oportet autem ut quadratus areae duplicatae, additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus.

Hujus theorematis a nobis inventi demonstrationem, quam et ipsi tandem non sine operosa et laboriosa meditatione deteximus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in Arithmeticis suppeditabit progressus.

Si area trianguli esset quadratus, darentur duo quadratoquadrati quorum differentia esset quadratus; unde sequitur dari duo quadratos quorum et summa et differentia esset quadratus: datur itaque numerus, compositus ex quadrato et duplo quadrati, æqualis quadrato, ea conditione ut quadrati cum componentibus faciant quadratum. Sed, si numerus quadratus componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati, ejus latus similiter componitur ex quadrato et duplo quadrati, *ut facillime possumus demonstrare*; unde concludetur latus illud esse summam laterum circa rectum trianguli rectanguli, et unum ex quadratis illud componentibus efficere basem, et duplum quadratum æquari perpendiculari.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur a duobus quadratis quorum summa et differentia erunt quadrati. At isti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primo suppositis, quorum tam summa quam differentia faciunt quadratum: ergo, si dentur duo quadrati quorum summa et differentia faciant quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturæ, priore minor.

Eodem ratiocinio dabitur et minor istà inventa per viam prioris, et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem præstantes. Quod impossibile est, quia, dato numero quovis integro, non possunt dari infiniti in integris illo minores.

Demonstrationem integram et fusius explicatam inserere margini vetat ipsius exiguitas.

Hac rationeprehendimus et demonstratione confirmavimus *nulum numerum triangulum, præter unitatem, æquari quadratoquadrato.*

XLVI (p. 16₃).

(Ad commentarium in proposition. IX Diophanti *De multangulis numeris.*)

BACHERES : Dato latere invenire polygonum. . . . Dato polygono invenire latus.

Propositionem pulcherrimam et mirabilem, quam nos invenimus, hoc in loco sine demonstratione apponemus :

In progressionē naturali, quæ ab unitate sumit exordium, quilibet numerus in proxime majorem facit duplum sui trianguli; in triangulum proxime majoris, facit triplum suæ pyramidis; in pyramidem proxime majoris, facit quadruplum sui triangulotrianguli; et sic uniformi et generali in infinitum methodo.

Nec existimo pulchrius aut generalius in numeris posse dari theorema. Cujus demonstrationem margini inserere nec vacat, nec licet.

XLVII (p. 16₃).

(Ad proposition. XXVII Bacheti Appendicis de numeris polygonis Libr. II.)

Unitas primum cubum; duo sequentes impares conjuncti, secundum cubum; tres sequentes, tertium cubum; quatuor succedentes, quartum; semperque uno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

Hanc propositionem ita constituo magis universalem.

Unitas primam columnam (1) in quacunque polygonorum progressionē constituit; duo sequentes numeri, muletati primo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario muletati, secundam

(1) Fermat a voulu généraliser, pour les différentes sortes de nombres polygones, la notion de cube (produit par n du carré de côté n), et il a appelé *colonne* le produit par n du polygone de côté n . Cette expression technique, qu'il semble avoir forgée lui-même, est généralement restée inconnue.

columnam; tres sequentes, muletati secundo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygōni quaternario muletati, tertiam columnam; et sic eodem in infinitum progressu.

XLVIII (p. 407).

(Ad proposition. XXXI Bacheti Appendicis Libr. II.)

In hac progressionē [*nempe* arithmetica, in qua minimus terminus aequatur differentiae], productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum aequatur aggregato cuborum a singulis.

Hinc sequitur cubum maximi, toties sumptum quot sunt numeri terminorum, ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

APPENDICE.

I.

DÉDICACE DU DIOPHANTE DE 1670.

ILLVSTRISSIMO VIRO D. D. IOANNI BAPTISTE COLBERTO, REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS, ERARIJ CENSORI GENERALI, SYMMO REGIORVM EDIFICIORVM, NAVIGATIONIS ET COMMERCII PREFECTO, REGNI ADMINISTRO, ETC.

PROBIT in lucem tuis auspicijs, Vir Illustrissime, Diophantus varijs auctus parentis mei observationibus; Illas mole quidem exiguas, sed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua est summa humanitas, forsitan non aspernaberis, præsertim cum ad numeros pertineant qui radicis instar ac velut in centro Matheseos positi, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, et quidquid ei affine est, alium quam te ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defecisse videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, et Barbarorum pectora liberalibus imbuta disciplinis mitescant. Cum vero illas ferè omnes aut earum semina Mathesis contineat, menti imperio natæ et membris famulatio aptis opitulatur, pacisque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, sed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem se præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam succisiuis horis in medio forensium negotiorum strepitu, absque vilo tamen Iurisprudentiæ, et Senatorij muneris dispendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illustrissime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores sint quam mole, si satis otij suppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceà sagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore

non minus quam veram virtutem à fucatâ secernis, et eorum qui operam nanant aerario puras manus aquè dignoseis, ac puritatem auri se probare posse Matheseos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonstraui. Sed te aliò vocant multa magnaue, in quibus ita versaris, vt te pluribus parem, et adhuc maioribus dignum ostendens, innicti Principis famam, illiusque subditorum lenamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde testantur commercij reparatæ, et Piratarum repressæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas transeuntem et vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci speluncâ et pertimescunt; idem quoque testantur portus bellicis instructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, et hostibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, cum rerum potiri; testantur denique hinc restauratæ tuis curis Artes, nobilique consortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici possint, tuâ industriâ sociatæ, illinc scientiarum arcana in tuis ipsis penatibus mirum in modum illustrata. Quæ satis fidem faciunt quantum tibi cordi sit non solum vt Regni, sed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines promoucantur et vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aspiraute tui fauoris aurâ obliuionis et inuidiæ scopulos vitare possit; nunquam illos metuet hoc tui nominis præsidio munitum opus, si benignâ manu, vt enixè rogo, suscipias istud æterni monumentum obsequij, quod tibi voveo,

Addictissimus

S. FERMAT.

II.

PRÉFACE DU DIOPHANTE DE 1670.

Lectori Beneuolo.

DIOPHANTVM hic habes, et varias quibus auctus est observationes, paucas illas quidem et breues, non tamen contemnendas; nec enim me latet huiusmodi opera ponderari potius quam numerari à peritis aestimatoribus, quibus vnica demonstratio, inò interdum vnicum Problema magni voluminis instar est; in Mathematicis nimirum disciplinis, noua Laconico licet more exhibita veritas pluris fieri solet, quam verbosa quorundam tautologia; Doctis tantum quibus pauca sufficiunt, harum observationum auctor scribebat, vel potius ipse sibi scribens, his studijs exerceri malebat quam gloriari; adeo autem ille ab omni ostentatione alienus erat, vt nec lucubrationes suas typis mandari curauerit, et suorum quandoque responsorum autographa nullo servato exemplari petentibus vltro miserit; norunt scilicet plerique celeberrimorum huius sæculi Geometrarum, quam libenter ille et quantà humanitate, sua ijs inventa patefecerit; Quamobrem superstites quosdam Ipsius amicos, sæpe hortatus sum sæpiusque hortabor, vt si quos illius ingenij partus blandà manu susceperint, illos in musæi vmbra diutius delitescere non patiantur; dum autem plura quæ breui, vt spero, prodibunt, colligo, tibi non iniucundam fore duxi, novam horum Diophanti operum, istarumque simul observationum editionem: Illas Parens meus quasi aliud agens et ad altiora festinans margini variis in locis apposuit, præsertim ad quatuor vltimos libros; cum enim ardua sectaretur ille, facilliora et vulgo Logistarum nota quæ duobus primis libris continentur,

aut ut ipsius Diophanti verbis utar, τὴ ἐν ἀρχῇ στοιχειωδὴς ἔχοντα ferè omnino prætermisit; Qualis autem Quantusque in Arithmeticis fuerit Diophantus, sat sciunt qui primis, ut dicitur, labris puram Logisticam gustauerunt; tredecim ille scripserat Arithmeticorum libros, quorum sex tantum extant, unusque de numeris multangulis, reliqui vel temporis iniuriâ perierunt, aut alicubi forsân Thesauri instar ita seruantur, ut nullius videantur esse, dum publici juris fieri non possunt; meminit Diophanti Suidas in voce Hypathia, et Lucillius libro secundo Anthologie capite vigesimo secundo Diophanti Astrologi recordatur; an vero Suidas et Lucillius de hoc eodemque loquantur, nihil comperti habemus; cum multi circa Neronis tempora vixisse putant, nec deest qui Antonino pio imperante eum floruisse lenibus fretus coniecturis suspicetur; illud audacter asserere licet, hoc Auctore nullum antiquiorem hactenus innotuisse, qui hanc instaurauerit doctrinam, quam à Græcis acceptam Arabes cum ipso Algebra nomine ad nos transmississe existimantur; eximia vero Problemata quæ hoc opus complectitur, adeo humanæ mentis captum videntur superare, ut ad eorum explanationem indefesso Xylandri labore et mirandâ Bacheti sagacitate opus fuerit; duo illi fuere doctissimi horum librorum interpretes, nam vix eo nomine dignus est Græcus Scholiastes; Bombellius verò in Algebra quam Italico sermone vulgavit, Diophanti questionibus suas permiscens, fidi interpretis partes non sustinuit; neque eo functus est munere subtilissimus Vieta qui peragrans auiâ Logisticæ loca, nec alterius inherens vestigiis, sua maluit in lucem proferre inuenta quam faciem præferre Diophanteis; quantum autem Analyticam ultra veteres terminos promouerit Parens meus, tuum erit, Erudite Lector, iudicium; vtinam ipsius cœptis non obstitissent angustiae temporis, et plura parantem mors heu nimium immatura nobis illum non præripuisset! plura procul dubio ex eodem fonte manassent, nec suis quedam istorum problematum demonstrationibus carerent; quin vero ipse eas penes se, et in scrinio, ut ita loquar, pectoris habuerit, tum aliae lucubrationes, tum illius animi candor et modestia dubitare non sinunt; licet autem à tot tantisque viris laudatus Parens, à liberis absque

invidia laudari possit, nec illud ingenti luctui solatium, vel potius irritamentum denegari debeat, magis tamen libenter, ni fallor, illius encomium perleges quod in diario Doctorum elegantissimo, et in plerisque clarissimorum scriptorum libris occurrit; horum nonnulli magnificè jamdudum mentionem fecere variorum ipsius operum, quæ licet inedita non tamen latuerunt, ut abundè testantur quædam excerpta quæ adijcere non piget, et doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs illius epistolis à R. P. Iacobo de Billy Societatis Iesu Sacerdote, ejus perspicacissimum ingenium et eruditio commendatione non egent, cum in ipsius operibus satis eluceant; cæterum quidquid in hoc erratum fuerit, id Typographorum incuriæ tribuas, et æqui bonique consulas quæso. VALE.



III.

DÉDICACE DES VARIA OPERA.

CELSSISSIMO S. R. I. PRINCIPI FERDINANDO EPISCOPO PADERBORNENSI, COADIVTORI
 MONASTERIENSI, COMITI PYRMONTANO, LIR. BARONI DE FURSTENBERG. SAMUEL
 DE FERMAT S. P.

Si minus quod tibi, Celsissime Princeps, offero non respuas, grati simul animi et obsequii quodam erga te, ac pietatis officio erga Parentem fungi videbor : dum in illius operum Mathematicorum limine nomen statuo, quod injurias temporum et invidiæ morsus arcere possit. Quis enim unquam credat improbari quod tu semel probaveris, quem Arctoi syderis instar intuentur quicumque scientiarum pelagus sulcare cupiant, mox tutius et tranquillius futurum, cum fluctus omnino sedaverit lenior pacis aura quæ tandem spirare cœpit? Sic autem per omnes orbis literarii partes lucem spargis, ut te cuncti suspiciant et neminem despicias; ita multorum errorem Magnatum damnas qui veluti quodam summæ dignitatis privilegio sibi concessum existimant, ut non tantum impune, verum etiam splendide possint esse indocti; et se contemnendos putent nisi Musas spernere audeant. Sed abundè tua probat autoritas nulli magis utiles esse literas, quàm ei qui, ut decet, Pastor populorum esse velit, nulli plus gloriæ afferre : quia rarò conveniunt imperii comes sollicitudo, et aptus colendæ menti secessus. Idem profecto centrum ferè nunquam habent civilium curarum et sublimium disciplinarum circuli : in tanto negotiorum circuitu rectà ad doctrinæ culmen ascendere non minus forsàn difficile Politico videatur, quàm

Geometrae curvas rectis aequare, ejus rei specimen exhibet hic edita dissertatio. Superavit tamen omnes obices tua Celsitudo, tibi que fidum in mediis tempestatibus portum condere potuisti, et egregiis plerisque scriptoribus quos tuarum fama virtutum ad Paderæ fontes allicit, ubi venam quovis latice puriorem nanciscuntur, ubi te praeunte citius discunt quò properandum sit, quàm si studiis in umbra educatis anxie semotos calles investigarent. Longum scilicet iter est per praecepta, breve per exempla, brevissimum per exempla Principis viri, quem etiam avia peragrantem loca plurimi libenter sequi conantur; sed paucissimi sunt qui tuis inherere vestigiis queant; et dum optas

Voce ciere viros, Phœbumque accendere cantu,

vocis tuae suavitas tuis non mediocriter votis obstat. Deterret nimirum qui sic hortatur; silere docet, qui tam doctè loquitur. Id ego exerior quoties opera tua pervolvo, quæ mihi licet ignoto et immerenti mittere voluisti: illa semper, adulationis experts, ejus causas procul habeo, mirari simul et laudare gaudeo quæ vix quisquam imitari posse confidat. Monumentis enim Paderbornensibus, quæ tam munificè restaurans tam eleganter celebras, monumentum longè perennius exegisti: si Quinctilii Vari, ejus cladem cedro dignis carminibus memoras, Legiones Romæ reddi nequeunt, at saltem tui sermonis illecebris et venustate Vari vel Augusti sæculum ei reddere videris, Virgiliumque simul et Horatium ac utriusque præsidium et decus referre. Augurabatur olim lepidus Vates non defuturos Marones, quandiu sint Mæcenates, sed quidquid præclarum in Mæcenate et Marone fuit, in eodem pectore reperiri posse nemo speraverat, sive quòd nimia copia Poëtas inopes et steriles plerunque reddit (unde Theocritus * Diophanto fateatur artes excitari paupertate, quam laboris magistram vocat) sive quòd alienis carminibus ei non opus est qui suis satis oblectari potest, ut adoptivos liberos querere non solet cui natura legitimam sobolem dedit. Verùm in te, Celsissime Princeps, collecta non sine stupore cer-

* Idyl. 16.

nimus, quæ divisa tam illustres alios effecerunt; et tua singularis humanitas, quæ tot eximias dotes connectens, cœlestes gemmas auro inserere videtur, spondet à te benignè excipiendum, tuoque in sinu fovendum hunc ingenii paterni partum, qui suo defensore orbatus, ut posthumus, tuo patrocinio indiget, quod venerabundus exposco.

DE CELSISSIMO PRINCIPE FERDINANDO FURSTENBERGIO, EPISCOPO PADERBORNENSI, ETC.

OB AVREVM NUMISMA, IN QVO
illius imago conspicitur, missum.

ACREA Pierio quam culmine mittis imago
Quæ nostros ingressa lares fulgore replevit
Immeritamque manum, Phœbi ipsa referre videtur
Ora, solo qui cuncta fovet, nec florea tantum
Rura super letus rutilat glebasque feraces,
Cernere sed sterilem non dedignatur arenam;
Sic hilares oculos simul et cum fronte serena
Innocuos mores insignis vultus adumbrat;
Sit tamen ars quamvis spectanda numismatis, illam
Effigiem superavit opus quodecunque Camænis
Sponte tuis fluxit dulci de fonte leporum :
Scilicet Aonij meliùs te vertice montis
Spirantem ostendunt Musæ, dum natus Olympo
Doctrinam pietate auges, castasque sorores
Ad superos tollens, dignoscis quam sit inane
Ornari ingenium, nimioque calescere motu,
Si vacuum æthereo pectus non uritur igne.
Luminibus quantis et quot virtutibus omnes
SCAVITER* alliciens animos, validique catenis

* Illustrissimi Principis tessera SCAVITER ET FORTITER.

Eloquij blandus victor trahis! his ego sensi
 Me placide captum jampridem, nec tibi possim
 Hoc magis addici, qui me devincit, honore.
 At quas nunc grates referam? Te principe Vatum
 Munera digna mihi Romanaque carmina desunt;
 Carmina Mæcenas sed tu par ipse Maroni
 Nostra nec expectas, nec vilia munera queris.
 Non eget exigua sublimis arundine laurus,
 Et raucae non vocis eget tua fama susurro;
 Sat nitidis Latio quibus aurea redditur ætas
 Eximias scriptis potuisti pandere dotes,
 Purior illiui cen splendens lumine solus,
 Ut decet, ipse suis radijs se pingit Apollo.

DE PRINCIPIS EIVSDEM PREGLARO

Monumentorum Paderbornensium opere.

Dum Paderæ fontes æterno carmine Princeps
 Aonij celebrat spes columnenque chori,
 Ut superat quæ sic ponit monumenta, suisque
 Altius ipse aliud tollit ad astra modis!
 Hujus Cana fides ornat pia pectora, mentem
 Lux Sophiæ, Latij præscus et ora lepor.
 Amissas* his olim Aquilas quæ flevit in arvis,
 Delicias illinc Roma decusque trahit.
 Fernandi eloquium Tiberis miratur, et avi
 Immemor, Augusti sæcla redire putat.

* Natus est Illustris, Princeps in ea Germaniæ parte in qua caesæ fuerunt Quinctilii Vari Legiones.

DE EODEM PRINCIPE QUI MIRANDIS

*ageat doctrineque dotibus stemmatis ac dignitatum splendorem augens,
pacem omnibus morum et facundiar suavitatem persuadere possit.*

ODE.

Nunc corda mulcens ó utinam Sacer
 Notos recursans per fluvios Olor
 Mox cogat infensos canorà
 Voce potens lituos silere ;
 Hic prima Pindi gloria cui favet
 Phoebus, nitentem Lilia quem tegunt,
 Quas ore non compescat iras
 Pierià modulatus arte ?
 Ut cum querelis dulcisonis nemus
 Vox blanda latè lusciniæ replet,
 Discordis oblitæ susurri
 Mille solent volucres tacere ;
 Non ille frustra sit patriæ datus
 A quo feroces flecti animi queunt ;
 Martis nec incassum per arua
 Threicius cecinit Sacerdos :
 Orpheus parentem Calliopen colens
 Lenire plectro quot didicit feras !
 Sermone sic præstat domare
 Pectora, quam superare ferro.

IV.

PRÉFACE DES VARIA OPERA.

ERUDITO LECTORI.

Non te latet, Erudite Lector, opera Mathematica præfatione vix indigere : nam ut Paralogismi culpam frustrâ longo sermone Geometra deprecari vellet, aut pro vera demonstratione falsam obtrudere; ita non opus est assensum solidæ rationis viribus debitum suppliciter efflagitare, quem adversarius videns sciensque, licet valdè reluctans, denegare non possit. Præterea supervacaneum foret laudes Mathematicum fusè celebrare, cùm hanc spartam tot egregij scriptores adornandam jampridem susceperint. Quis enim nescit Geometriam et uberes illius fructus ad cælum evehi à Platone, qui non solùm eam divinitùs humanæ menti insitam, sed etiam ab ipso numine excoli putavit? nonne meritò Mathesis à Philone vocata fuit liberalium artium metropolis, quas, ubi desit illa, luminibus, et veluti manibus orbatas esse liquet? Unde à vero non aberrat qui ut manum instrumentum ante instrumenta, sic et Mathesin dici posse credit artem ante alias artes, cum illius terrâ marique, et bello ut pace, tam evidens utilitas sit; quod unus instar omnium docuit olim Archimedes, dum infirmus corpore sed invictus ingenio senex, obsidionis Syracusanæ pars maxima, patriæ vis summa fuit, Briareus et Centimanus à Romanis appellatus : quamobrem admiratione perculsum Marcellum licet hostem ab eo tot damnis affectum ei tamen inimicum esse noluisse Livius tradit, sed propinquis inquisitis honori præsidioque nomen, ac memoriam tanti viri fuisse. Mathematicas deinde disciplinas ansas Philosophiæ

videri quis diffiteatur? cum Philosophus quamvis abundè Logicæ versutijs et argutijs instructus, si lux mathematica non affulgeat in Physica comparari possit Polyphemo in spelunca occæcato, et muneris, quo frui potuit, usum nescienti, vini scilicet, cui præclarus non ita pridem Philosophus Geometriam similem dici posse arbitratus est, quod recens inflat, vetus oblectat et vires auget. At non istorum operum Authorem inflavit unquam Mathesis, et tot demonstrationes, dum ab ipso non sunt editæ, quibuslibet argumentis meliùs demonstrant eum ab ostentatione laudisque cupidine alienum fuisse. Quòd autem de illarum sorte sollicitus non fuit, ferè semper autographa nullo servato responsorum exemplari mittere solitus, parum abfuit quin hæc, quæ fortè non interitura credes, omninò extincta fuerint, antequam in publicam lucem prodirent. Hinc fit ut quia hæc sparsim disjecta colligere facile non fuit, fato posthumorum operum serò, pauciora, et minus culta typis edantur. Hinc etiam contingere poterit ut omnia quæ hic occurrent tibi non videantur nova : sed quamvis alij de quibusdam rebus, quas hic invenies, scripserint et lucubrationes suas priùs vulgaverint, non ideò minùs hæc inventa istorum operum Authori debentur, qui adeò fastus, et invidiæ expers fuit, ut aliena suis sat aliunde notis immiscuisse credi non possit, qui sua vix sibi tribuebat. Ab eo, exempli causâ, libri duo Apollonij Pergæi de locis planis procul dubio restituti sunt, licet Franciscus Schooten Academiæ Lugduno Batavæ Professor illos à se restitutos asserat; nam sua typis mandavit Franciscus Schooten anno 1657, sed libros duos, qui hic extant, Apollonij Pergæi de locis planis se vidisse Lutetiæ manuscriptos, nec non ad locos planos et solidos Isagogen, testis omni exceptione major Herigonius asserit tomo 6. cursûs Mathematici editi anno 1634 (¹). Credere tamen, ut dixi, malim Batavum Professore eâdem de re scripsisse, quàm ab eo, vel à quovis alio aliquid perpetratum esse suspicari quod ingenuum animum dedeeat, vel inverecundiam plagij probare possit. Verum in

¹) Voir la note 1 de la page 171, où est rétablie la véritable date de la mention faite par Hérigone.

istis, ni fallor, operibus, de quibus te non ex parva mole judicaturum sat scio, occurret tibi non injucunda varietas, ut et in epistolis, quæ vel ab Authore, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris scriptæ fuerunt. Has inter sunt nonnullæ Pascalij in quibus ingenij non ministeri quàm perspicacis radios agnosces, quos ejusdem aliæ lucubrationes, et ipsæ satis exhibent Pascalij cogitationum reliquæ : illud enim opus in quo *pendent opera interrupta*, multis eximium Matheseos circa res sacras specimen videtur, *æquataque machina carlo*. Quis autem ignorat qualis quantusque Geometra et quam insignis in Academia Parisiensi Professor fuerit Robervallius, ejus hic aliquot epistolas legere poteris, et perlegisse gaudebis? Eduntur hic quoque nonnullæ Gallicè vel Italicè scriptæ à Kenelmo Digbæo, qui præter generis nobilitatem et honores gestos, non solum ingenio doctrinæque, sed etiam pietate conspicuus fuit, ac veræ Religionis cultu, quam ut gladio, sic et calamo tueri conatus est, ut fidem facit aureus illius liber de veritate Catholicæ Religionis Anglicè scriptus. Illis epistolis additur una aut altera Frenieli, ejus miram Arithmetica problemata solvendi facilitatem à multis prædicatam, et ejusdem responsis confirmatam Analystæ norunt. Quas verò non adjecimus circà Cartesianam Dioptricam epistolas legere poteris in tertio volumine epistolarum Cartesij ejus stupendæ sagacitatis circà Geometriam admiratione se captum fatetur is etiam qui nonnunquam ab eo dissentit. Ut autem in varijs istis operibus, sic et in epistolis multa reperies quæ ad Geometriam, vel Analyticen pertinent aut numerorum arcana, de quibus si plura videre cupias, habes observationes ad Diophantum, ejus opera typis mandari curavi anno 1670. et Doctrinæ Analyticæ inventum novum collectum è varijs epistolis D. Petri de Fermat ab insigni Geometra R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote. Est hic præterea nonnihil circa Mechanicam et Geostaticam, nec non Dioptricam ac Physicam, circà quàm v. g. non contemnendam fore confido epistolam de proportionem quâ gravia decedentia accelerantur, ad Gassendum, quæ ipsi Gassendo viro exquisitæ eruditionis, et candore ac moribus qui Christianum Philosophum decent, prædito non displicuit, ut ejus responso, licet brevi, satis patet.

Sic etiam celebris Itali Geometrae Abbatis Bened. Castelli epistola probat ei non displicuisse quæ hic scripta sunt circà motum gravium aut centrum gravitatis. Cæterùm in his Parentis mei operibus et epistolis quæ multas disputationes circà quæstiones arduas continent, et quibus duas addidimus criticis observationibus non spernendis referatas, nullam vocem quæ sit acerbior, nullum pervicacis controversiæ vel amarulentiæ contentioni occurrere vestigium, poteris observare. Id innatam mansuetudinem Authoris arguit, qui nullà contradicendi libidine veritatem quærens, illam ab alijs inveniri gaudebat et gratulabatur : qui secus agunt eam ut juvenes proci colere videntur, dum sibi dumtaxat affulgere vellent quod diligunt ; sed qui veritatem divino, ut par est, amore prosequuntur, ipsam omnibus innotescere cupiunt, suamque felicitatem augeri putant, cum ejusdem plurimi fiunt participes. Epistolas verò ad Authorem scriptas, quæ hic extant, ut nactus sum, edendas ingenuè existimavi, nullomodò minuire sed augere cupiens tantorum virorum famam, quorum alia responsa, nondum prælo commissa, si mihi suppeterent, ut harum disputationum seriem edere non pigeret. Ex istis autem operibus, Erudite Lector, fructus, ni fallor, et voluptatis non parùm percipere poteris et si quid incuriâ Typographorum erratum sit, illud suppleas aut ignoscas quæso.

Schemata suis locis in toto opere, ut in illius parte, reperirentur, nisi defuisset sculptor ligni notis Geometricis incidendi peritus ; sed figuræ ⁽¹⁾ quæ cum textu edita non fuerunt, ad libri calcem sunt rejecta, numeris paginarum, ad quas referuntur, apposis, quod semel monuisse sufficiat.

⁽¹⁾ Ce mot *figuræ*, qui rend la phrase incorrecte, doit y avoir été ajouté après coup. Dans l'édition des *Varia opera*, les figures sont insérées dans le texte jusqu'à la page 103. Il y a à la fin du Volume cinq Planches contenant les figures des pages 104 à 167, plus une qui manque à la page 91. Pages 201 et 203, reparaissent dans le texte trois autres figures relativement simples.

V.

ÉLOGE DE MONSIEVR DE FERMAT,

Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Journal des Scavans, du Lundy 9, Fevrier 1665.

On a appris icy avec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit un des plus beaux esprits de ce siecle, et un genie si universel et d'une estendüe si vaste, que si tous les scavans n'avoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses loüanges.

Il avoit toujours entretenu une correspondance tres-particuliere avec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Hugens, etc. et avec la pluspart des grands Geometres d'Angleterre et d'Italie. Mais il avoit lié une amitié si étroite avec M. de Carcavi, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses estudes, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux écrits.

Mais parce que ce Journal est principalement pour faire connoître par leurs ouvrages les personnes qui se sont renduës celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des écrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire un éloge plus ample et plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la science des nombres et dans la belle Geometrie. On

a de luy une methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Une autre *de maximis et minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans et solides; mais encore à l'invention des touchantes et (*) des lignes courbes, des centres de gravité des solides, et aux questions numeriques.

Une introduction aux lieux, plans et solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans et solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Un traité *de contactibus sphericis*, où il a démontré dans les solides ce que M. Viet Maître des Requestes, n'avoit démontré que dans les plans.

Un autre traité dans lequel il rétablit et demontre les deux livres d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et une methode generale pour la dimension des lignes courbes, etc.

De plus, comme il avoit une connoissance tres-parfaite de l'antiquité, et qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoyent; il a éclaircy une infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On a imprimé depuis peu quelques-unes de ses observations sur Athenée; et celuy qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inséré dans son ouvrage une tres-belle sur une Epistre de Synesius, qui estoit si difficile, que le Pere Petau qui a commenté cét autheur, a avoué qu'il ne l'avoit peu entendre. Il a encore fait beaucoup d'observations sur le Theon de Smyrne et sur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluspart ne se trouveront qu'éparses dans ses Epitres; parce qu'il n'écrivoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouvrages de Mathematique, et toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empéchoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge avec beaucoup d'assiduité, et avec tant de suffisance, qu'il a passé pour un des plus grands Jurisconsultes de son temps.

(*) *Livre des touchantes des lignes courbes.*

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'avec toute la force d'esprit qui estoit necessaire pour soutenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il avoit encore une si grande delicatesse d'esprit, qu'il faisoit des vers Latins, François et Espagnols avec la même elegance, que s'il eût vécu du temps d'Auguste, et qu'il eût passé la plus grande partie de sa vie à la Cour de France et à celle de Madrid.

On parlera plus particulièrement des ouvrages de ce grand homme, lors qu'on aura recouvert ce qui en a esté publié, et qu'on aura obtenu de M. son fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore esté.



VI.

OBSERVATION DE MONSIEUR DE FERMAT

SUR SYNESIUS.

*Rapportée à la fin de la traduction du Livre de la mesure des eaux courantes,
de Benedetto Castelli ⁽¹⁾.*

Les pages qui restent vuides dans ce cayer m'ont donné la pensée de les remplir de la belle observation que j'ay apprise ces jours passez, de l'incomparable Monsieur de ⁽²⁾ Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, et de me souffrir souvent dans sa conversation. C'est sur la quinziesme Lettre de Synesius Evêque de Cyrene, qui traite d'une matiere qui n'a esté entenduë par aucun des interpretes, non pas mêmes par le sçavant Pere Petau, ainsi qu'il l'adyonë luy-même dans les Notes qu'il a faites sur cët Autheur; Et je donne d'autant plus volontiers cette observation, qu'elle a beaucoup de rapport avec les traitez qui sont cy-devant.

Cët Evêque écrit à la sçavante Hypatia, qui estoit la merveille de son siecle, et laquelle enseignoit publiquement la Philosophie, avec l'admiration de tous les sçavans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. J'ay

⁽¹⁾ Traduction publiée par Saporta sous le titre : *Traicté de la mesure des eaux courantes de Benoist Castelli religieux du Mont-Cassin et Mathématicien du Pape Urbain VIII. Traduit d'Italien en François avec un discours de la jonction des Mers, adressé à Messieurs les Conduissaires deputez par sa Majesté. Ensemble un Traicté du mouvement des eaux d'Evangeliste Torricelli, Mathématicien du Grand Duc de Toscane. Traduit du Latin en François.* — A Castres, par Bernard Barcouda, Imprimeur du Roy, de la Chambre de l'Edict, de la dite Ville et Diocèse, 1664. — Le texte reproduit par Samuel se trouve pages 84-87, sous le titre : *Observation sur Synesius.*

⁽²⁾ Monsieur Fermat Saporta.

traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Je me trouve si mal, que j'ay besoin d'un hydroscope. Je vous prie d'en faire faire un de cuivre, et de me l'achefer. C'est un tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure et la grandeur d'une fleute; sur sa longueur il porte une ligne droite, qui est coupée en travers par de petites lignes, par lesquelles nous jugeons du poids des eaux. L'un des bouts est couvert d'un cone, qui est posé également dessus, en telle sorte que le tuyau et le cone ont une même base. L'on appelle cét instrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, et l'on peut aisement compter les sections qui coupent la ligne droite, et par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous avons perdu la figure et l'usage de cét instrument, de même qu'une infinité d'autres belles choses, que les Anciens avoient inventées, et dont ils se servoient, les scavans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit une Clepsydre, mais le Pere Petau a rejeté avec raison cette opinion. Pour luy, il avouë, qu'il ne le comprend pas, il soupçonne pourtant que c'estoit un instrument qui servoit à niveler les eaux, et qui avoit du rapport avec celui dont Vitruve fait mention au livre 8. ch. 6. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruve, et de Synesius, que ce sont deux instrumens fort differens, et en figure, et en usage, et que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, et celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Je passe sous silence plusieurs autres differences, que je pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de (¹) Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument servoit pour examiner le poids des différentes eaux pour l'usage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme (²) $\xi\omicron\pi\lambda\iota$, dont se sert Synesius, le monstre clairement. Il ne signifie

(¹) Monsieur Fermat *Saporta*.

(²) Terme de $\xi\omicron\pi\lambda\iota$ *Saporta*.

pas icy *libramentum* le nivelement, comme a crié le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, et de la le traité des equiponderans d'Archimede a pour titre ὁ ἐξισοτιζόμενος ⁽¹⁾. Mais d'autant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouvoit pas donner exactement la différence du poids des eaux, à cause qu'elle est ⁽²⁾ petite entre elles, les Mathématiciens inventerent sur les principes du traité d'Archimede *de his que vehuntur in aqua*, celui dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mêmes, la différence du poids qu'elles ont entr'elles, la figure en est telle (fig. 150); AF est un Cylindre de cuivre, AB est le bout

Fig. 150.



d'en haut, qui est toujours ouvert, EF est le bout d'embas, qui est couvert du cone EIF, qui a la même base que le bout d'embas. AE, BF, sont deux lignes droites coupées par diverses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, et qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empêchera; mais il y enfoncera jusques à une certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; et il y enfoncera diversement, suivant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera; et moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrier, s'il en estoit question icy. Voila la figure et l'usage de cét instrument, et la raison de cét usage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circon-

⁽¹⁾ ὁ ἐξισοτιζόμενος *Saporta*.

⁽²⁾ ὀλίγη est fort petite *Saporta*.

stances, que feu Monsieur de Monchal, Archevêque de Tolose, ayant envoyé cette explication au Pere Petau, il advoüa que Monsieur de ⁽¹⁾ Fermat estoit le seul qui avoit compris quel estoit l'instrument, et il avoit écrit que dans une seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, j'ay crû que le Lecteur sçavant et curieux ne sera pas marry que je luy en aye fait part.

(1) Monsieur Fermat *Suporta*.

VII.

VIRO CLARISSIMO DOM. DE RANCHIN,

SEN. THOL.,

PETRUS DE FERMAT S. P. D.

Polyanum ⁽¹⁾ tibi tuum, Vir Clarissime, mitto, sed observanda in eo quaedam suppeditat codex manuscriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hæcenus ineditorum quem penes me habeo ⁽²⁾; apud eum collectionem quamdam præceptorum et monitorum militarium inveni sub nomine Περρεζολων, cujus auctorem licet manuscriptus non detegat, colligo tamen ex glossario Græcobarbaro Meursij ⁽³⁾, eum esse Heronem, non illum quidem Alexandrinum cujus spiritalia et alia quædam opuscula extant, et qui antiquo, hoc est, optimo ævo, Græcè scripsit, sed alium posterioris ævi, quod pleraque ipsius vocabula Græcobarbarâ satis innunt; utrumque, ætatem nempe et nomen auctoris, confirmat Meursius in voce κοντουβέρνιον, ubi citantur sequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπέστειλε γούν τῆς νυκτός εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντουβέρνια, hæc enim verba cum in meo manuscripto desint ⁽⁴⁾, supplendum in eo nomen auctoris ex manuscripto Meursii; tempus vero quo hæc scribebantur et quo voces ἄπληκτον et κοντου-

(1) Les observations critiques qui suivent se rapportent à l'édition *princeps* du texte grec de Polyen, donnée par Casaubon (Lugduni, 1589, apud Io. Tornaesium, in-12). Elles ont été recueillies par Samuel Mursinne dans la préface de son édition, Berlin, 1756.

(2) On ignore ce qu'est devenu ce manuscrit grec.

(3) Imprimé à Leyde en 1587, réimprimé en 1614 et 1660.

(4) Il faut sans doute lire *adsint*.

βέρνιον in usu erant, ultra septingentos plus minus annos non videtur excurrere; in hoc autem περὲς ἑξῶν tractatu, pleraque Polyæni stratagemata suppresso authoris nomine alijs sæpe verbis referuntur, quandoque et iisdem, unde ampla emergit emendationum et notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel si mavis doctis omnibus tuo nomine jure representationis libenter exhibeo.

Cleomenis stratagema narratur lib. 1 Polyæni pag. 20 editionis Tornæsianæ sequentibus verbis : Κλεομένης, Ακκεδαιμονίων βασιλεὺς ⁽¹⁾, Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν. ἦν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβὲς φυλακὴ τῶν ὁρωμένων τοῖς πολέμοις· καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο, ὑπὸ κήρυκος ἐσήμεινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα ὁρᾷν ἐσπούδαζον. ὁπλιζομένων, ἀνθωπλίζοντο. ἐξιόντων, ἀντεπεξίσταν· ἀναπαυομένων ἀνταναπαύοντο. Κλεομένης λήθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ, ὁπλίσασθαι· ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο. Κλεομένης ὁπλισμένους ἐπαγαγὼν εὐμαρῶς ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργεῖους ἀπέκτεινε, hoc loco post verba ἐξιόντων, ἀντεπεξίσταν, addendum ex manuscripto ἀριστῶντων, ἡρίστων, quod finis ipsius stratagematis plenissimè confirmat.

Themistoelis stratagema, eodem libro pag. 44, refertur hoc modo : Θεμιστοκλῆς Ἴωνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοὺς Ἕλλησι καταγράφειν ἐπὶ τοῦ τεύχους, Ἄνδρες Ἴωνες, οὐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας. τούτων ἀναγινωσκωμένων, βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποίησατο, corrigendum ex manuscripto ἐλογίσσατο, quam esse veram lectionem innuit sensus.

Agesilai stratagema occurrit lib. 2^o ⁽²⁾, pag. 86. Ἀγησίλαος, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναίους ἐνίκησεν· ἡγχείλέ τις, οἱ πολέμοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς· ὁ δὲ προσέταξεν, ἐᾶν αὐτοὺς οἱ καὶ βούλονται ἀπιέναι· ὥς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίους reponendum ex manuscripto Θεβαίους.

(1) Les *Varia* omettent Ακκεδαιμονίων βασιλεὺς, que donne le Diophante de 1670. Pour tout le reste du détail des passages cités (grec et traduction latine), on a suivi le texte de l'édition de Polyen de 1589.

(2) Samuel a imprimé lib. 10.

Aliud Agesilai stratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγχισίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἡξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δύνα-
τοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν, οἷς διαλέξῃται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων·
τούτοις ἐπὶ πλείστον συγγενόμενος καὶ κοινῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ταῖς
πόλεσιν στάσιν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας. Vulteius hoc modo
interpretatur : *Agésilæus in legationibus petebat ab hostibus, ut maxime
potentes ad se mitterent; cum quibus de communi utilitate sermones con-
ferret. Cum his plurimum habens consuetudinis, et communicans focum
et cineres, seditiones in urbes excitabat, propter vulgi suspiciones. Videtur
interpres loco verbi σπονδῶν quod est in textu Græco, legisse σποδῶν
cum vertat cineres, sed nihil mutandum ex manuscripto evincitur ubi
leguntur hæc verba καὶ ὄρκους πρὸς αὐτοὺς ποιοῦμενος.*

Clearchi stratagema narratur libro eod. pag. 110, his verbis : Κλέαρ-
χος ἦν ἐν Θράκῃ· νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στρατεύμα κατελάμβανον, ὃ δὲ πα-
ρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδέν α ὀρθὸν ἀνίστασθαι· ὃ δὲ ἀνασ-
τάς ἀναιρείσθω, τὸ παρήγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας, καταφρο-
νεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. Verba quidem hic supplenda ex manuscripto,
quæ tamen videtur in suo codice vidisse interpres Latinus, licet desint
in editione græcâ Tornæsij, sunt autem sequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύ-
σαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. *Atque ita desierunt exilire ac per-
turbari.*

Perdiccæ stratagema sequens legitur libro 4, pag. 314 (¹) : Περδίκκας
Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων, ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσ-
κοντο ῥωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπιδὶ πρὸς τὰς μάχας
ἦσαν ἀπολμότεροι, ἐπεκηρυκέυσατο περὶ λύτρων, ἐντειλόμενος τῷ κήρυκι,
ἐπανέλθοντι ἀγγεῖλαι, ὥς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιντο, ἀλλὰ ψηφί-
σειεν τοὺς ἀγχιμαλώτους κτείνουειν. οἱ δὲ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ
τῶν λύτρων σωτηρίας, εὐπολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὥς ἐν μόνῳ
τῷ νεκρῷ ἔχοντες τὸ σῶζεσθαι, quod sic interpretatur Vulteius. *Perdiccas,
Illyriis et Macedonibus bellum gerentibus, cum multi Macedones caperen-
tur rivi, reliqui etiam redemptionis spe ad pugnam minùs alacres erant.*

(¹) Les *Varia* indiquent pag. 114.

quibus legationem inter se de redemptoriis muneribus mittentibus, praecepit legato, ut reversus nuntiaret, se redemptoria munera Illyriorum non accepturum, sed condemnatos captivos morte affecturum. Macedones, desperatâ salute redemptivâ, audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in solâ victoriâ salus posita esset. In hoc stratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornaesianae: si vera esset explicatio Vultei, non solum vera sed et necessaria esset illa emendatio, sed frigidissimum esset stratagema, si sequeremur sensum interpretis: Polyænus quippe vult Perdiccam praecepisse legato, ut reversus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, et hic est verus sensus stratagematis, quem Hero aliis verbis, secundum hanc quæ est vera et germana interpretatio, expressit in manuscripto his verbis, ἐπετίθευσε τοιοῦτον, παρασκεύασε τινὰ ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκύρωσαν ἓνα ὅσους κρατήσουσιν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri stratagema refertur etiam lib. 4, pag. 248, verbis sequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεισθαι μέλλων, παράγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν· ἦν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν, εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν. ἦν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνη τότε δὴ... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν· οἱ δὲ Πέρσαι στήλημα προσκυρήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμας ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρείος δὲ ἐκυδριοῦτο, καὶ χαϊδρὸς ἦν, ὡς ἄμαχ' ἡ κρατὼν· οἱ δὲ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες, ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις, καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες, ἐς φυγὴν ἐτρέψαντο.

Hoc loco desunt quaedam verba post vocem τότε, quæ supplenda ex manuscripto ubi narratio est integra et elegans: lacuna itaque ex eo sic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis stratagema tale proponitur libro 5, pag. 385. Παμμένης ἐλίγην ἔχων δύνανται ὑπὸ πλειόνων ἀποληφθεῖς, ἐπεμψεν αὐτόμολον ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον· ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἐπανελθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει. ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθήμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξιππάσατο αὐτὸς σύνθημα· τοῖς δὲ ἦν ἀπορία, γνωρίζειν ἐν σκοτῷ τοὺς οἰκείους μὴ δυνάμενοι διὰ τοῦ συνθήματος.

Hic addenda ex manuscripto post verbum αὐτὸς sequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τοῦτου στρατὸς ἐγίνωσκον τὸν πολέμιον τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολέμιους, τὸν πολέμιον τὸ σύνθημα ἀποκρινόμενων.

Pompisei stratagema refertur lib. 5, pag. 402. Πομπίσκος, περιστρατοπεδεύων πολιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς γῶρας ἐξιέναι τοὺς πολέμιους ἐκώλυσεν· ἐπὶ δὲ τόπον ἓνα συνεχῶς... καὶ τοῖς ληϊζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τοῦτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως ἄδεως ἐνταῦθα προΐεσαν· ὁ δὲ παρὰ τὸν σκοπὸν ὡς ἔμαθεν τοὺς ἥκοντας πολλοὺς, ἐπιθέμενος τοὺς πλείστους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς, quæ hic vulgo legitur, corrigenda ex manuscripto et loco illius reponendum συνεχῶραι quod ex conjecturâ viderat Casaubonus ut patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6, pag. 426. Ἀλέξανδρος ἡγόρευεν πολιορκούντος Λεωσθένους πρὸς ἄπασας τὰς Ἀττικὰς νύκτας φανερώς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπειμψεν ἐπὶ ἀκέρτιον νύκτωρ, etc. legendum esse, ἐπὶ ἀκέρτιου, ut vult Casaubonus in notis, confirmat codex manuscriptus ubi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem sonant.

Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 7^o (*), pag. 477, his verbis, Κύριος Μήδους παραταξάμενος τρις ἡττήθη, ἐπεί δὲ τὸν Πέρσων αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν πασσαργάδαις, τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψεν· πάλιν ἐρυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἶδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖδας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς, ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτως διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κύριον πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεῖσθαι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες, quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo conficimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis sequentibus rem narrat et stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθεῖς τούτων νικώμενοι, etc. vox autem illa melius

authoris sensui respondet quam τι πζθόντες vt legendum censuit Casan-
bonus.

Darii stratagema narratur lib. 7, pag. 489, hoc modo. Δαρειὸς ἐπολιέ-
μαι Σάκκας τριχῆ διηρημένους· μιᾷς ἐκράτησε μοίρας· τῶν δὲ Σάκκων
ἰζόντων τὰς ἐσθῆτας, καὶ τὸν κόσμον, καὶ τὰ ὅπλα περιέθηκε τοῖς Πέρ-
σαις, etc. hic loco vocis ἰζόντων quae est corrupta in editione Tornesii,
legendum ex manuscripto ἀνακρεθέντων.

Autophradatis ⁽¹⁾ stratagema legitur lib. 7, pag. 516 et tale est.
Αὐτοφραδάτης ἐμβλαθεὶς Πισιδαῖς βουλόμενος τὴν εἰσβολὴν στενόπορον
καὶ φυλάττομένην ὄρων, προσήγαγε μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δὲ ἀπήγα-
γεν ὀπίσω, μέχρι σταδίων ζ'· νύξ ἐπῆλθεν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισι-
δῶν ἀπῆλλάγησαν, οἰόμενοι τοὺς πολεμίους ἀπελκελυσθέναι· ὁ δὲ τῶν Ψιλῶν
καὶ ὀπισίων τοὺς ἐλαττοτάτους λαβὼν, πολλὰ σπουδῇ ὁρμηδὼν διῆλθε τὰ
στενὰ καὶ τὴν Πισιδῶν γῶραν ἐπέβησεν.

In hoc stratagema loco verborum μέχρι σταδίων ζ' reponendum
procul dubio ἐπίσημον κόπινον, quod Vulteius arithmeticarum apud Grae-
cos notarum parum callens non intellexit, similitudine inter ζ quod
significat 6, et ζ' quod significat 90, delusus, legendum igitur μέχρι
σταδίων ζ', quam esse veram lectionem, ratio ipsa primum confirmat,
si enim Autophradates ad sex tantum stadia recessisset, hostes suspi-
cione, et metu non liberasset, deinde in manuscripto legitur ἐννενέ-
κοντα absque notis arithmeticis.

Scipionis continentiae exemplum laude dignissimum refertur lib. 8,
pag. 568, sequentibus verbis, Σχημάτων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ
πόλιν Φοίνισσαν, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλους ὑπερβυῶς
ἔχουσιν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας, ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα.
τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας
ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, etc. ibi vulgo legitur φυγαγωγοὶ quod interpre-
s vertit *captivorum ductores*, sed legendum ex manuscripto νυμφαγωγοὶ.

(1) Cet alinéa et le suivant sont dans le Diophante de 1670, mais manquent dans les
Varia.

hoc est *virginum ductores*, quæ correctio et verissima et elegantissima, ut nullus supersit dubitandi locus.

Plura adjungerem, sed feriis jam desinentibus quarum beneficio otium suppetebat, finem quoque huic $\pi\alpha\rho\epsilon\kappa\beta\omicron\lambda\acute{\omega}\nu$ $\pi\alpha\rho\epsilon\kappa\beta\omicron\lambda\acute{\eta}$ imponimus. Vale et me ama.



VIII.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON,

LIBELLORUM SUPPLICUM MAGISTRO,

SAMUEL DE FERMAT S. P. D.

Criticas observationes quas mihi nuper misisti, vir clarissime, sapius legi non sine voluptate et admiratione; in illis enim ingenii, judicii, et doctrinæ dotes quas in te jampridem suspicimus ubique elucet: nihil autem invenire possim quod tanti muneris vice tibi referam, nisi commodum egestati meæ succurrerent variæ lectiones quas vir tibi singulari conjunctus amicitia, cujus mihi jucunda semper est recordatio, margini apposuit quorundam librorum quos sedulò pervolvebat, et quorum pleraque loca, sed ἐδού παρέργον, emendavit: seis enim quàm præcoci ille ubertate florum amœnitatem fructuum maturitati junxerit, nec me latet quantà ipse fiducia suas exercitationes solitus sit in tuum sinum effundere; licet autem omnes istæ quas excerpti emendationes, vel parentis mei conjecturæ⁽¹⁾, tibi novitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua est comitas, te benignâ manû suscepturum non dubito.

Theonem Smyrναeum, ne te diutius morer, vir clarissime, nosti, auctorem operis illius cui titulus τῶν ζετῶν μυσθηνιστικῶν ὑποθέσεων εἰς τὴν τοῦ Ηράκλειτου ἀναγωγῶν, quod prodromi instar est aut isagoges Philo-

(¹) Les mots *vel parentis mei conjecturæ* sont omis dans le Diophante de 1670.

sophiæ Platonicae, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat : illud opus edidit Lutetiae anno 1644 Ismael Bullialdus vir doctissimus et Latinitate donatum elegantibus notis illustravit : sed non omnibus illud mendis purgasse videtur, ut aliquot, ni fallor, exemplis, quæ sequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78 illius operis ubi περὶ ἁρμονίας et συμφωνίας agit : locum illum exscribere non piget, ipsa enim series emendationis procul dubio necessitatem et veritatem ostendet : τὰ ⁽¹⁾ γράμματα, αὐτὸς ἰlle, φωνὰ πρῶται εἰσὶ καὶ στοιχειώδεις ⁽²⁾, καὶ διαιρετοὶ, καὶ ἐλάχιστοι etc. ⁽³⁾, et inferius, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων, οὔτινες πάλιν φωνὰ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ, καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ asteriscus in margine ⁽⁴⁾ respondet cum voce διαιρεταί, at hic repōnenda his videtur vox ἀδιαιρετοὶ loco τοῦ διαιρετοὶ et διαιρετικαί, legendum nempe γράμματα φωνὰ εἰσὶ ἀδιαιρετοὶ, idque confirmat Manuel Bryennius ⁽⁵⁾, cap. 1, lib. 2 Ἀρμονικῶν : legendum præterea φθόγγων, οὔτινες πάλιν φωνὰ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαιρετοὶ, et hæc quoque lectio confirmatur verbis ejusdem Bryennii lib. 1, cap. 3, ubi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νότον τοῦ χροῦνου, punctum vero et instans sunt ἀδιαιρετὰ et consequenter φθόγγος ἀδιαιρετός, non *dividendi vim habens*, ut vult interpres Latinus ⁽⁶⁾ : nec immeritò Bacchius Senior in introductione artis musicæ ⁽⁷⁾ questioni illi τί οὗν ἐστὶν ἐλάχιστον τῶν μελωδομένων, respondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, sed etiam ὅτομον esse

⁽¹⁾ Le texte de Boulliau porte τὰ δὲ.

⁽²⁾ Les mots καὶ στοιχειώδεις sont omis dans les *Varia*.

⁽³⁾ Les *Varia* omettent etc.

⁽⁴⁾ La leçon διαιρεταί est également indiquée en marge, par Boulliau, pour διαιρετοὶ dans le premier passage.

⁽⁵⁾ Le texte grec de Manuel Bryenne n'a été publié que par Wallis, dans le Tome III de ses Œuvres (Oxford, 1699). Samuel de Fermat cite donc cet auteur d'après un manuscrit, que M. H. Oudot a retrouvé à la Bibliothèque Nationale. Il contient, de la main de Fermat, des annotations critiques que nous publions comme dernière pièce de cet appendice.

⁽⁶⁾ Boulliau traduit comme suit le second passage grec donné plus haut : *intervallu vero sonis [constant], quæ voces rursum sunt primæ, vim dividendi habentes, et elementares*.

⁽⁷⁾ *Antiquæ musicæ auctores septem*, ed. Meibomius (Amsterdam, 1652), I, page 2.

docet antiquæ musicæ celeberrimus auctor Aristides Quintilianus lib. 1 de Musicâ ⁽¹⁾, atque ita autoritas æque ac ratio suffragatur huic emendationi, quæ fit unius tantum litteræ mutatione. Minima quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, ubi vulgò male legitur, *φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορείους*, legendum scilicet, *φασὶ*, ut apud Bryennium *λέγουσι* ⁽²⁾. Paulò inferius ubi legitur *ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μεῖζων ἤχος, ἡρέμους δὲ μικρὸς*, legendum videtur *ἡρεμίζας*, et Bryennii autoritate confirmatur ⁽³⁾.

Hactenus de sono de quo agitur in cap. illo 6. In cap. vero 8, agitur de semitonio, et ita vulgò legitur *καθὲν* ⁽⁴⁾ καὶ τὸ ἡμίστων ἡράμμω οὗχ, ὡς ἤμω φωνῆς καλούμεν, ἀλλ' ὡς μὲν τῷ ἀποτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur *καθὲν* non *καθὲν* ⁽⁵⁾ : legendum præterea ἀλλ' ὡς μὲν ἀποτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν ἀποτελόν, quæ lectio ejusdem Bryennii autoritate nixa veriore vulgatâ sensum efficit.

Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μουσικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανόμενων, ut Porphyrii verbis utar, quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276, sed non sine mendo, malè enim ibi legitur, ἐκ τῶν παρὰ ⁽⁶⁾ τῆς μουσικῆς ὑποτιθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, et audacter dicam, certissima alterius loci ejusdem Theonis emendatio paginâ 164, ubi de octonario loquitur : refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradidit Evander hoc modo, *Ἡρεσούτατος πάντων Ὀσπρις, θεοῖς ἀθηνάτοις, πνεύματι, καὶ οὐρανῷ, ἡλίῳ καὶ σελήνῃ, καὶ γῇ*,

⁽¹⁾ *Antiquæ musicæ auctores septem*, ed. Meibomius, II, page 11.

⁽²⁾ Dans son édition *Theonis Smyrniacæ Expositio rerum mathematicarum*, Teubner, 1878, Ed. Hiller n'a pas adopté cette correction, comme il a fait pour les précédentes; et, en effet, Théon continue à citer ici le péripatéticien Adraste. L'erreur de Fermat a été au reste occasionnée par Boulliau, qui a traduit *aiunt*.

⁽³⁾ Hiller lit *ἡρεμίζας*, qui est moins bon.

⁽⁴⁾ κατὰ *Samuel*. Mais Boulliau donne *καθὲν*, qui n'a nullement besoin d'être corrigé en *καθὲν*. Samuel a dû faire quelque méprise. — Hiller suit, dans ce passage, la leçon de Fermat, en supprimant le dernier mot *ἀποτελόν*, qui est surabondant.

⁽⁵⁾ *ἐπὶ Samuel*.

καὶ νοῦτι, καὶ ἡμέρῃ (¹), καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ (²) ἐσομένων ΕΡΩΤΕ
 πανταίῃς τῆς αὐτοῦ ἡρετῆς βίῃ συντάξεως, id est, ut vertit Bullialdus,
antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, et Carlo, Soli,
et Lunæ, et Terræ, et Nocti, et Diei, et patri eorum quæ sunt quæque
futura sunt, prædicabo memoriam magnificentie ordinis ritus ejus : men-
 dosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, et hanc lec-
 tionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur
 ΕΡΩΤΗ, atque ita parvâ unius scilicet litteræ mutatione huic loco sua
 lux, et amorî sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sa-
 pientissimi Platonis, ejus velut interpretes Smyrnaeus ille, sententia,
 dum ait in convivio (³) καὶ μὲν ὁῦ τῆν γε τῶν ζώων ποιήσιν πάντων τις
 ἐνζωνιώσεται μὴ οὐχὶ (⁴) ἔρωτος εἶναι σοφίαν ἣ γίγνεται (⁵) καὶ φέρεται
 πάντων τῶ ζώων, *etenim animalium omnium affectionem, ut vertit Serranus,*
ex amoris sapientiâ existere, id est gigni atque nasci, cequis negaverit,

Per quem genus omne animantum
 Concipitur, visitque exortum lumina Solis (⁶).

Apud Iulium Frontinum (⁷) de aquæductibus Romæ pag. 106 edi-
 tionis Plantiniana, vulgò sic legitur : *in vicinariâ fistulâ, quæ in confe-*
rio utriusque rationis posita est, utrique rationi penè congruit. Nam habet
secundum eam computationem, quæ interjacentibus modulis servanda est
in diametro quadrantes viginti : cùm diametri ejusdem digiti quinque sint
et secundum eorum modulorum rationem qui sequuntur ad eam, habet
digitorum quadratorum ex gnomoniis viginti. Hic procul dubio legen-
 dum non *ad eam*, sed *aream* : ejus emendationis ratio ex supputatione
 geometrica ducitur.

(¹) καὶ ἡμέρῃ om. Samuel.

(²) καὶ τῶν Samuel.

(³) PLATON, *Banquet*, 197 a. — Samuel emploie l'édition de Platon d'Henri Estienne, 1578, qui renferme la traduction latine de Jean de Serres.

(⁴) οὐχὶ Samuel.

(⁵) La vulgate ajoute τι.

(⁶) LUCRÈCE, *De Rerum natura*, I, v. 4-5 : Per te quoniam genus etc. — Hiller a adopté la leçon ἔρωτι proposée par Fermat.

(⁷) Voir ci-après, sous le numéro X, la Lettre de Fermat à Ismael Boulliau du 21 novembre 1645.

Eadem enim paginâ legitur, *centenaria autem et centenum vicesum, quibus assidue accipiunt, non minuuntur, sed augentur. Nec usu frequens est* : videtur legendum *Cen.* id est *centenaria*, loco vocis illius *Nec*, litteris scilicet ordine inverso accipiendis, cum fortasse in manuscripto repertum fuerit *Cen.* hoc est *centenaria*, quod transcriptor transposuit et legendum *Nec*, particulâ sensui magis, ut videbatur, accommodatâ perperam existimavit.

His emendationibus unam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenaeum : Sextus ille ⁽¹⁾ lib. 1. Pyrrhonianum hypotyposeon pag. 12, ostendere conatur quam variae sint pro diversitate aetatum Phantasie, *παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας*, inquit, *ὅτι ὁ αὐτὸς ἀνὴρ τοῖς μὲν γέρονσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν, εὐκρατος, καὶ < τὸ > αὐτὸ βρώμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαρρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατὰκρὲς, καὶ ρωνή < ὁμοίως > ἢ αὐτῇ τοῖς μὲν ἀμαρρα δοκεῖ τυγχάνειν, τοῖς δὲ ἐξάκρουτος*, id est, ut vertit Henriens Stephanus, *Ex aetatibus autem quoniam idem aër senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in aetatis flore* ⁽²⁾ *sunt, bene temperatus, et idem cibus, senibus quidem tenuis videtur, at iis qui florent aetate crassus; eodem modo et vox eadem, aliis quidem depressa esse videtur, aliis autem* ⁽³⁾ *alta*; at hujus loci elegantior sensus erit si legatur non *βρώμα* sed *γρώμα*, alioquin de sensu visus qui faciliè maximam mutationem patitur, nullus hic foret sermo : præterea *τὸ ἀμαρρὸν* melius colori convenit quam cibo, et aequè de colore ac de cibo dici potest *τὸ κατὰκρὲς*, sic apud Virgilium legimus, *saturatas murice vestes* ⁽⁴⁾ et *hyali saturo fucata colore* ⁽⁵⁾.

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem urbanissimi illius

(1) Fermat s'est servi de l'édition gréco-latine des Chouet, Orléans, 1621. Il faut lire pour la référence *pag.* 22, au lieu de *page* 12.

La correction qu'il propose a été adoptée par Fabricius dans son édition gréco-latine des Œuvres de Sextus Empiricus, page 28, note Z. Elle avait été également proposée par Sau-maise.

(2) flore constituti sunt *Samuel*.

(3) vero *Samuel*.

(4) Cette expression est de Martial, VIII, 48.

(5) *Géorgiques*, IV, 335.

scriptores sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut indicetum occurrat, quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de depravatis Alcibiadis moribus, qui locus si vulgatam lectionem retineas ipso forsan Alcibiade depravatio erit : Athenæi ⁽¹⁾ verba hæc sunt, *Αυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν· ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίόχως καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλησποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε, Μεδοντιάδᾳ τὴν Ἀβυδηνήν, καὶ Ξυνωκέπην. ἔπειτα αὐτοῖν γίνεται θυγάτηρ, ἣν οὐκ ἔφραστο δύνασθαι γινῶναι, ὁποτέρου εἴη. ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὥρατα, ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ, καὶ εἰ μὲν χρῶτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης, Ἀξίόχῳ ἔφρασκεν εἶναι θυγατέρα· εἰ δὲ Ἀξίόχως, Ἀλκιβιάδου : error hic procul dubio in voce illa ξυνωκέπην et legendum ξυνωκέτιγν ⁽²⁾ hoc est *concubuerunt*, atque ita si falsa Xynocēpe deleatur, et sola supersit illa duobus nupta Medontias, portentosa istorum invenum libidinis novitati nihil detrahatur; veritas autem istius emendationis satis per se patet, et ex ipsâ loci serie elici potest, in quo illud δύο ὄντε alioqui supervacaneum foret, nec jam amplius ambigua proles; ratio igitur illius correctionis in promptu est, cui ejusdem Athenæi accedit autoritas, is ⁽³⁾ enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, *Μεδοντιάδης γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἐρασθείς ⁽⁴⁾ ἔσπερξε, καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλησποντον σὺν Ἀξίόχῳ, ὃς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστῆς, ὧς φησι Αυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης**

(1) Pages 534-535 de l'édition de Lyon, 1657. — Page 704 de cette même édition, après certains *Collectanea in aliquot Athenæi loca, Authore Viro Illustri L. I. S. T.*, on dit :

« ALIA IN ATHENÆUM ANIMADVERSIO SINGULARIS, AUCTORE VIRO ILLUSTRIS P. F. S. T. »

Page 535 A. *Μεδοντιάδᾳ τὴν Ἀβυδηνήν καὶ Ξυνωκέπην.*

« Mirum viros doctos non animadvertisse hic mendum subesse, cum si ponas Axiochum » et Alcibiadem duas uxores duxisse, Medontiadem et Xynocēpen, tota perit lepidæ narrationis gratia. Legendum verò pro Ξυνωκέπην, *συνωκέτιγν*, à verbo *συνωκέω*, numero duali præteriti activi imperfecti, id est concumbent, Axiochus nempe et Alcibiades vni tantum Medontiadæ, quæ cum filiam peperisset, dubium quidem erat ex utrius semine nata esset : ideoque cum puer esset facta, uterque in illius amplexus ruebat, eo prætextu, » quod non ex se, sed ex altero susceptam diceret. »

(2) On plutôt *ξυνωκέτιγν*. La leçon *συνωκέτιγν* (voir la note précédente), qui ne conserve pas la forme attique, ne peut guère être attribuée à Fermat.

(3) Page 574 de l'édition de 1657.

(4) Ce mot *ἐρασθείς* est omis par *Samuel*.

ἐξωνόωντες αὐτῷ, id est ut interpretatur Dalechampius, *Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare cepit, et imprimis charam habuit. eam tamen cum Hellespontum navibus adiisset. Axiocho navigationis comiti, et pulchritudinis ipsius amatori, ut inquit Lysias in oratione quam contra eum scripsit, utendam dedit : ibi autem fictitiæ Xynoeipes nulla mentio, et illud ἐξωνόωντες æque ac ξυνωζέτην communes Alcibiadis, et Axiochi amores fuisse satis arguit.*

Sed ab istorum juvenum voluptate oculos avertamus, et eam quæ ex studiorum societate percipitur, puriorem et diuturniorem, summumque adversorum solatium litteras esse fateamur; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido observationes in quibus amici manum agnoscēs; ipsius ego lucubrationum sparsas varijs in locis reliquias è tenebris quibus abdita jampridem erant (¹), eruere conatus sum, neque hæc contemnenda duxi, ut ex hoc spicilegio rerum quæ diligentissimos (²), ut ita loquar, messorēs latuerunt, pateat, quantam earum auctor in liberiore et conjecturis aperto critices campo segetem fuerit collecturus, si sæpius in illo spatium voluisset : Vale et me ama.

(¹) quibus illas parentis modestia abdiderat *Samuel* dans son édition de Diophante.

(²) perspicacissimos *Samuel* dans son édition de Diophante.

IX.

ISMAELI BULIALDO V. C.

P. F. S. D. P. ⁽¹⁾.

Duas potissimum modulorum seu fistularum, quibus aqua erogatur aut accipitur, species constituit Frontinus in *Tractatu de Aqueductibus*, quarum una secundum diametros foraminis seu aperture aut luminis, ut loquitur ipse Frontinus, consideratur; altera secundum aream ipsam, hoc est spatium planum ipsius foraminis, quod in utroque casu rotundum et circulare supponitur.

Prioris fistularum speciei series ita procedit, ut earum diametri per quadrantem unius digiti juxta progressionem arithmeticam continuo augeantur ⁽²⁾.

Primus istius terminus est circulus cujus diameter est quadrans digiti; secundus, cujus diameter habet duos quadrantes digiti; tertius tres, quartus quatuor, et sic de cæteris usque ad vicenariam, centenariam, et ulterioris gradûs fistulam.

In hac serie vicenaria fistula, verbi gratia ⁽³⁾, ea est cujus apertura vel lumen habet diametrum 20 quadrantium ⁽⁴⁾ unius digiti.

⁽¹⁾ Publié par Camusat (*Histoire critique des journaux*, Amsterdam, J.-F. Bernard, 1734, p. 190-195) avec l'adresse fautive *Paulus Fermatus Ismaeli Bulialdo V. C. S. D. P.* — Reproduit par M. Ch. Henry (*Recherches sur les Manuscrits de Pierre de Fermat*, p. 16-17).

⁽²⁾ augeatur *Cam.*

⁽³⁾ V. C. *Cam.*

⁽⁴⁾ quadratorum *Cam.*

Posterioris fistularum speciei series non secundum diametros, sed secundum aream ipsam luminis progreditur.

Prima nempe hujus speciei ea est quæ habeat aream $<$ unius digiti quadrati, secunda quæ aream $>$ duorum digitorum quadratorum, quinary quæ quinque.

His positis, intelligis, Vir Clarissime, prioris speciei fistulas differre omnino a fistulis speciei posterioris. Nam, cum prima posterioris speciei habeat pro area ipsius aperture unum digitum quadratum, prima prioris speciei pro area aperture non habet vigesimam dumtaxat partem unius digiti quadrati, quod facile colligitur ex supputatione arithmetica juxta rationem Archimedeam ⁽¹⁾, quam si sequaris, semper prioris speciei fistulas minores fistulis speciei posterioris invenies usque ad vicenariam; post vicenariam vero semper prioris speciei fistulas majores fistulis speciei posterioris invenies. Ipsa vero vicenaria, quæ in confinio, utrobique fere æqualis existit : lumen enim vicenariæ prioris speciei est ad lumen vicenariæ speciei posterioris ut 55 ad 56, et sic differentia est unius tantum quinquagesimæ quintæ.

Ex supradictis patet emendandum textum Frontini in *libro de Aqueductibus*, p. 106 *Stewechianæ editionis* ⁽²⁾ apud *Raphelengium* 1608, et ita concipiendum :

In vicenariâ fistula, quæ in confinio utriusque rationis posita est, utrique rationi ⁽³⁾ *pene congruit. Nam habet, secundum eam computationem* ⁽⁴⁾ *quæ interjacentibus* ⁽⁵⁾ *modulis servanda est (quæ quidem est prior fis-*

⁽¹⁾ Archimedeam *Can.*

⁽²⁾ Stewersianæ edit. *Cam.* Il s'agit du Volume intitulé : *V. Jul. Fl. Vegetii Renati Comitis aliorumque aliquot veterum De Re Militari libri. Accedunt Frontini stratagematibus eiusdem auctoris alia opuscula. Omnia emendatius quædam nunc primum edita a Petro Scriverio cum commentariis aut notis God. Stewechii et Fr. Modii. Ex officina Plantiniana Raphelengii* MDCVII.

⁽³⁾ Dans son édition critique *Julii Frontini de aquis urbis Romæ libri II* (Leipzig, Teubner, 1858), Fr. Bücheler corrige *utraque ratio* d'après le manuscrit *Cassiniensis*, unique source du texte de Frontin. Le passage reproduit par Fermat se trouve dans cette édition, page 15, l. 21 à page 16, l. 3.

⁽⁴⁾ *comparationem Can.*

⁽⁵⁾ Polenus a corrigé *in antecedentibus*, ce qui concorde avec la leçon du *Cassinensis*, *in teccedentibus*.

tularum species), *in diametro quadrantes viginti; cum diametri ejusdem digiti quinque sint, et secundum eorum modulorum rationem qui sequuntur, aream* ⁽¹⁾ (ita confidenter corrigimus, cum vulgo male legatur *ad cam* : hæc est enim posterior fistularum species quæ) *habet digitorum quadratorum ex gnomoniis* ⁽²⁾ *viginti.*

Cum enim vicenaria prioris speciei habeat in diametro quadrantes viginti unius digiti, hoc est quinque digitos, erit ⁽³⁾ quadratum diametri 25 digitorum. Est autem proxime ut 14 ad 11, ita quadratum diametri ad circulum, ex Archimede, et est proxime pariter ut 14 ad 11, ita 25 ad 20. Ergo vicenaria prioris speciei, quæ habet viginti quadrantes in diametro, habet etiam fere viginti digitos quadratos areæ, ut pene æqualis sit fistulæ vicenariæ speciei posterioris : quod probandum erat ad sensum Frontini planius aperiendum.

Ut autem perfectius innotescat vicenarias utriusque speciei omnium proximas inter se esse ⁽⁴⁾, exponatur tabula sequens

1	11	224	6	66	224	11	121	224	16	176	224	21	231	224
2	22	224	7	77	224	12	132	224	17	187	224	22	242	224
3	33	224	8	88	224	13	143	224	18	198	224	23	253	224
4	44	224	9	99	224	14	154	224	19	209	224	24	264	224
5	55	224	10	110	224	15	165	224	20	220	224	25	275	224

Primus ordo est numerorum ab unitate in progressionem naturali.

Secundus est a 11; progreditur per additionem ipsius 11.

Tertius est ejusdem semper numeri 224.

Patet autem ex supputationibus geometricis fistulam prioris speciei ad fistulam posterioris esse ut numerus collateralis secundæ columnæ

⁽¹⁾ Bücheler a fait la même correction que Fermat, mais comme il met plus haut le point-virgule après *sint* et non après *viginti*, il considère le texte comme en désordre et propose de le remanier, ce qui est inutile, car le sens est bien celui qu'indique Fermat :

Dans le tuyau du module 20, qui se trouve à la rencontre des deux façons de compter, celles-ci se trouvent sensiblement d'accord. Car, selon le système adopté pour les modules inférieurs, il a 20 quarts de doigt en diamètre; cela faisant 5 doigts de diamètre, il aura aussi, si on le rapporte au système des modules supérieurs, une section de presque 20 doigts carrés », au lieu de 20 doigts carrés exactement, qu'il devrait avoir d'après ce système.

⁽²⁾ ex gnomoniis *Scriv.* et gnomonum *Cam.* exiguo minus *Bücheler.*

⁽³⁾ edit *Cam.*

⁽⁴⁾ intercesse *Cam.*

ad numerum 224 tertiæ. Exempli gratia, fistula quinta ⁽¹⁾ primæ speciei est ad fistulam quintam secundæ ut 55, qui est numerus collateralis 5, est ad 224. Etc.

Unde apparet, cum numeri 220 et 224 sint omnibus secundæ et tertiæ columnæ inter se proximiores, vicenariam, quæ est ipsis collateralis, esse ejus naturæ et proprietatis quam innuit Frontinus. Unde evidens est non solum correctionem nostram esse veram, sed etiam necessariam, imo et demonstratam.

In eadem pagina emendandus est etiam textus, ut sensus restituatur Frontino, ubi etiam legitur :

Centenaria autem et centenum vicenum, quibus assidue accipiunt, non minuuntur, sed augentur.

Post hæc autem verba, inquam, sigillatim exponit Frontinus qua proportionem aquarii has duas fistulas fraudulenter auxerint; sequitur itaque *nec usu frequens est* : legendum loco vocis *nec, cen* hoc est *centenaria*, quæ haud dubie hac ratione tribus primis characteribus in MSS. designabatur. Quod cum exscriptores non caperent, inverso vocabulo, voci *cen* substituerunt *nec*, decepti fortasse simili, quam aliquot ante lineis, cum de duodenaria loquitur Frontinus, viderant, expressione ⁽²⁾.

Si hanc emendationem non admittas, erunt hæc omnia scopæ dissolutæ. Sensus integer Frontini id præcipue vult, aquarios quatuor fistularum modum mutavisse, quod ita exprimit :

Sed aquarii, cum manifestæ rationi in ⁽³⁾ pluribus consentiant, in quatuor modulis nominaverunt ⁽⁴⁾ duodenaria ⁽⁵⁾ et vicenaria et centenaria

⁽¹⁾ quintæ *Cam.*

⁽²⁾ La conjecture de Fermat est plus ingénieuse que solide; mais, de fait, les mots *nec usu frequens est* ne se trouvent pas dans le Cassinensis. Bücheler (p. 16, l. 16-17) les a donc supprimés purement et simplement.

⁽³⁾ Fermat ajoute ici *in* au texte de l'édition qui ne porte que *pluribus*, avec l'indication de la variante *plurimum*. Bücheler fait la même addition, d'après Polenus (p. 16, l. 9).

⁽⁴⁾ D'après le Cassinensis, pour ce mot qui a torturé Fermat, il faut partout lire *nominaverunt*.

⁽⁵⁾ duodenariam et vicenariam et centenariam *Cam.*

et centenum vicesimum, ubi quid per vocabulum *nominaverunt* intelligat, quo idem Frontinus duobus aliis locis paginae sequentis ⁽¹⁾ 107 citatur, amplius querendum et consulendi forsitan codices MSS.

Reliqua sequuntur in quibus suspicaremur aliquid transponendum, si Scaligerianam audaciam auderemus imitari, et ita omnino legendum post verba superiora ⁽²⁾ :

Vicenariam exiguiorem faciunt diametro digiti semisse ⁽³⁾, *capacitate quinariis tribus* ⁽⁴⁾ *et semuncia, quo modulo plerumque erogatur. Reli-*

⁽¹⁾ pag. seq. *Cam.*

⁽²⁾ L'ordre du texte édité est le suivant : *Et duodenaria quidem, quod nec magnus error nec usu frequens est, diametro adiecerunt digiti semuncioni scilicet, capacitate quinariis et bessem. Reliquis autem tribus modulis plus deprehenditur. Vicenariam exiguiorem faciunt diametro digiti semisse, capacitate quinariis tribus et semuncia, quo modulo plerumque erogatur. Centenaria autem et centenumvicesimum etc.* L'interversion proposée par Fermat est inutile. Voici le sens général du passage (éd. Bücheler, p. 16, l. 8 à 18) :

« Les distributeurs d'eau se conforment, en général, pour les modules des tuyaux, aux exigences de la raison; toutefois ils ont innové pour quatre modules, n^{os} 12, 20, 100 et 120. Pour le module 12, l'erreur n'est pas grande et d'ailleurs l'usage de ce module n'est pas fréquent: ils augmentent le diamètre de $\frac{1}{16}$ de doigt, la capacité de $\frac{97}{100}$ de *quinaire* ^(a). Pour les trois autres modules, la différence est plus grande. Le module 20, le plus employé pour les concessions, est diminué par eux de $\frac{1}{2}$ doigt, ce qui réduit la capacité de 16 quinaires $\frac{1}{24}$ (exactement $\frac{1}{24}$). Au contraire, les modules 100 et 120, qui servent constamment pour les prises, ne sont pas diminués, mais augmentés, etc. »

⁽³⁾ Bücheler ajoute *et semuncia*, contre l'autorité des manuscrits, parce què, dans le Tableau qui suit un peu plus loin (p. 19, l. 13), Frontin donne $\frac{1}{24} \frac{1}{288}$ pour le diamètre du module 20, ce qui correspond à la section de 20 doigts carrés (système des modules supérieurs). Mais il est clair qu'ici Frontin compte le module 20, suivant le système des modules inférieurs, à 20 quarts de doigt ou à 5 doigts de diamètre.

⁽⁴⁾ Bücheler ajoute *et quadrante*, pour le motif indiqué dans la note précédente. Comme le prend ici Frontin, le module 20 vaut évidemment 16 quinaires, et non 16 quinaires $\frac{1}{4} \frac{1}{24}$, comme il est indiqué au Tableau suivant (p. 19, l. 14). Quant au module effectif des *aquarii*, sa valeur en quinaires est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 12 \frac{2}{25}$. La différence avec 16 est $3 \frac{1}{25}$ ou $3 \frac{1}{24}$, à moins d'un scrupule $\left(\frac{1}{288}\right)$ près.

^(a) Le *quinare* est le tuyau de module 5 (diamètre $\frac{5}{4}$ de doigt), pris pour unité de capacité. La fraction $\frac{97}{100}$ est celle que donne le calcul, mais ne correspond pas exactement au texte de Frontin.

quis ⁽¹⁾ *autem tribus modulis plus deprehenditur : duodenariæ quidem, quod* ⁽²⁾ *nec magnus error nec usu frequens est, diametro adjece-
runt digiti semunciam sicileum, capacitati quinarie* ⁽³⁾ *et bessem. Centenaria
autem et centenum vic. etc.*

Sed de voce *nominaverunt* quid statuemus? quid statues, mi Bulialde? quid statuent docti? Sensum quidem capimus, sed expressionem Frontini aut sensum ipsius expressionis desideramus.

Non difficile est quæcumque in hac pagina et in paginis 107 et 108 de capacitatibus fistularum, earum diametris et perimetris enunciantur, quæ mire corrupta sunt apud Frontinium, ex geometricis supputationibus emendare. Quas si forte desideres, non gravabimur aggredi atque firmiter probare, ut, si ea, quæ dixerat ipse Frontinus, non fuerimus plane assecuti, ea saltem, quæ dicere debuerat, supplere non dubitemus.

Interea vale, Bulialde doctissime et amicissime.

Dabam Tolosæ Tectosagum ad diem xxiv novembris ⁽⁴⁾ anni à C. N. MDCLV.

⁽¹⁾ Bücheler ajoute *In* devant *reliquis*, ce qui semble inutile.

⁽²⁾ Bücheler supprime *quod*, d'après le Cassinensis, et ajoute plus loin *cujus* avant *diametro*.

⁽³⁾ quin et bessem *Cam.*, quinarie quadrantem *Bucheler*. Le Cassinensis donne *quinarie ebesem*. Le texte est évidemment corrompu, mais la correction de Bücheler, faite d'après Polenus, est peu admissible. En fait, comme je l'ai dit plus haut, l'augmentation en quinaires est exactement $\left[\left(3 \frac{1}{16} \right)^2 - 3^2 \right] \propto \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$, ce qui correspond en scrupules à 69,84. La correction de Polenus suppose que Frontin aurait, par approximation, pris 72 scrupules. Mais, comme ici la différence est très petite, elle aura dû être calculée encore plus exactement que la précédente (voir page 384, note 1). Il est donc probable que Frontin aura admis 69 scrupules $\frac{2}{3}$ (comme l'indique la leçon *et bessem*; comp. éd. Bücheler, p. 14, l. 24-25, et *besse scrupuli*). L'indication des scrupules, faite suivant la notation romaine des fractions de l'as, aura été laissée de côté par le copiste.

⁽⁴⁾ nov. *Cam.*

X.

LETTRE DE HUET ⁽¹⁾.

PETRO ET SAMUELI FERMATIS, PATRI ET FILIO, TOLOSAM.

Cum omnibus officiis amorem erga me suum Segræsius noster et jam nunc vester significaverit, tum illud longe mihi gratissimum est quod, quorumcumque hominum aliqua laude florentium sibi conciliauit benevolentiam, ejusdem me statim fecit participem. Quod sic interpretor, existimasse ipsum non certiore propensi in me animi testificationem dare se posse, quam si quod in vita carissimum habet, amicos nempe, eos mecum communes esse vellet. Quo beneficii genere, si unquam alias, nunc certe me cumulare pergit, cum doctrinæ, ingenij et urbanitatis egregia specimina ut ad me mitteretis, operâ suâ et aliquâ fortasse nostri apud vos commendatione perfecit. Parum equidem munere isto cæque quam de me suscepisse videmini opinione dignum me præbeam, nisi maximas vobis debere me gratias palam profitear et præclaras vtriusque vestrum dotes apud omnes decantem. Quod autem tuas veterum scriptorum castigationes et conjectanea, necnon et poematia, tu Fermati pater, puncto meo approbare velle præ te fers, sic accipio te industriæ tuæ testem et plansorem, non judicem querere. Sic ergo habeto nihil mihi magis consentaneum videri quam quod ζῶζοζζιπζζ vocem nihili et a vero Athenai ⁽²⁾ sensu alienam

⁽¹⁾ Lettre publiée par M. Ch. Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, p. 73-76) d'après le manuscrit n° 997 de la Bibliothèque de l'Université de Leyde, pages 119 et 140, et la copie dans le manuscrit de la Bibliothèque nationale, *Fonds latin* n° 4432, où elle est numérotée LXXVI.

⁽²⁾ Voir ci-dessus, page 378, note 2.

expungis, ξυνωρείτην autem acute et legitime substituis. Profecto, ut in emaculando erudito hoc scriptore multum desudarint Dalecampius nostras et Casaubonus, non exiguan tamen, post amplam messem, spicilegio materiem reliquerunt. Quid item certius quàm γρῶμz non βρῶμz legendum apud Sextum philosophum ⁽¹⁾? Hæc Theonis ⁽²⁾ quam profers emendatio sese ipsa vel minimum attendenti luculenter probat. Quod autem in Claudiani ⁽³⁾ epigrammate *pater* in *puer* reformandum statuis, χρῆτιζώτερον est et vulgaris ζζὶ πριδζγωγυζής ῥινδς olfactum præterit. *Puer* porro in obscenis esse qui nescit, quid sint πριδιζζ, quid πριδερζστειν, ignorat, nec catamitos noui dictos esse pullos, nec Martialis ⁽⁴⁾ sententiam assequitur, cum ait :

Sit nobis ætate puer, non pumice, levis,
Propter quem placeat nulla puella mihi

Atque utinam eiusmodi amenitatibus, tuisque etiam elegantissimis epigrammatis ac tuis item, Fermati fili, quæ mirifice sane nobis sapiunt, par referre possem! Sed quod ab exigua nostra et paupertina facultate non suppetit, id deuoto erga vos animo, omnibusque obsequijs representare conabor. Valete, Viri Eximij, Cadomi III non. dec. MDCLIX.

Si Incubrationibus tuis geometricis, in quibus diceris obtinere principatum, Fermati pater, me impertieris, optime de me fueris promeritus.

⁽¹⁾ Voir ci-dessus, page 377.

⁽²⁾ Voir ci-dessus, page 376.

⁽³⁾ Il s'agit de l'épigramme LXXVI de Claudien (éd. Heinsius, 1650), vers 5 et 6, où l'on lit :

Quid turpem *pateris* cano jam podice morbum,
Femineis signis Luna Venusque tulit

Fermat proposait de lire *pueris* au lieu de *pateris*; cette conjecture, ingénieuse mais inutile, n'a pas été prise en considération par les éditeurs subséquents de Claudien.

⁽⁴⁾ Martial, XIV, épigramme 205.



XI.

LETTRE DE FERMAT.

PETR. DAN. HUETIO S. P. D. PETR. FERMATVS. CADOMVM ⁽¹⁾.

Vix legeram tuam epistolam, cùm effictam jamdiu et marcescentem latini sermonis facultatem renocare statim sum aggressus, vt grati saltem animi officium quoddam rependerem, et elegantiam tuam quamtenus adumbrarem. Sed non succurrerunt verba, et in medijs conatibus ager jam deficiebam, aut si mauis aliud quoque Virgilianum ⁽²⁾, *inceptus clamor frustrabatur hiantem*, cùm ecce commodum superuenit urbanissimus Segresius, et amicum serio meditabundum, et jam pene cum vnguibus conflictantem, ac secum nescio quid obmurmurantem intuitus : « Ain vero, inquit, credisne Huetium a te aliquid elaboratum et quod demorsos sapiat vngues exspectare? Sincerum tantum cordis affectum expostulat, et in pignus amicitie nascentis aliquot aut versiculos aut criticas observationes exposcit. » — « Sed illud multo, inquam, difficilius euadet. Carmina enim paucissima penes me habeo, que tanto et tam celebri viro ausim communicare; animaduersiones autem criticas multo adhuc pauciores valeam exhibere; nam is certe sum qui notas hujusmodi censorias, nisi ipsarum veritas luce ipsâ clarior sit, omnino rejiciam; imo in ipsis ἀπόδειξιν ἐπισημασμένην, more geometrico, existinem requirendam. Quod

⁽¹⁾ Lettre publiée par M. Ch. Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, p. 77) d'après le manuscrit n° 997 de la Bibliothèque de l'Université de Leyde, pages 141 et 142, et la copie dans le manuscrit de la Bibliothèque nationale, *Fonds français* *Nouv. Acq.* n° 3280, f° 108 et 109.

⁽²⁾ Comparez *Énéide*, VI, 493.

» exempla, quæ jam ad clarissimum Huetium tuâ operâ peruenerunt,
» satis probant. Velim tamen in supplementum probationis adjungere
» doctissimi et eruditissimi illius viri approbationem vicem accuratis-
» simæ demonstrationis apud me obtinere, nec vllum amplius de vero
» Athenæi, Sexti, Theonis et Claudiani sensu dubitandi locum relin-
» quere. » — « Quâ ergo, inquit, ratione, amice, et epistolæ et expec-
» tationi respondebis? » — « Censeo, inquam, nil aliud mihi facien-
» dum, quam fortuitum hoc et familiare inter nos colloquium in
» speciem epistolæ efformandum, et Cadomum quamprimum transmit-
» tendum. » — Annuît Segresius, ego vero vsus sum consilio inopie
meæ perquam accommodato, et amicitiam tuam, Vir Clarissime, si non
facundiâ, saltem obsequio obseruantissimo, in posterum tentabo pro-
mereri. Vale. Tolosæ, VI Kal. Januar. anni MDCLX.

XII.

CEDE DEO, SEU CHRISTUS MORIENS.

D. PETRI DE FERMAT CARMEN AMICIBUS AD D. BALZACUM.

Obstupuit totiesque elusum mentis acumen
 Dediticit vanos veris præferre colores
 Luminibus. Quid bella moves, deletaque pridem
 Numina præstigiis linguæ solertis adumbras
 Infelix ratio? Num te simulachra tot annis
 Desita, et imbelles Divùm sub imagine formæ
 Fallaci cinxere metu? Num te ostia Ditis
 Aut stygie remorantur aquæ, Elysive recessus,
 Et quidquid credi voluit Dijs æqua potestas?
 Perge tamen quò te securo tramite ducunt
 Balzaco præeunte viæ, nec inertia dudùm
 Fatidicæ responsa Deæ, quercusve silentes
 Dodonæ, aut facili venerare oracula Phœbi;
 Cede Deo. Cessit veterum numerosa propago
 Cœlicolùm : Deus ecce Deus, quem prona parentem
 Agnoscit natura suum, cui terra, salumque
 Paret, et edomite fatalia flabra procelle,
 Submittuntque ipsæ jam non sua murmura nubes.
 Ille puro fulgore micans, de lumine lumen
 Dum traheret, Deus unus erat, natusque supremi
 Eternâ æternùm manans de mente parentis
 Assumpsit veros moriturse carnis amictus,

Si qua forte queat mortalia flectere corda,
 Tantillumque animis extundere possit amorem.
 At postquam summi tandem mandata parentis
 Horrendo sacrum caput objecere furori,
 Humanas morienti animo depromere voces
 Cœpit, et insolito succussus membra fragore,
 Omnipotens, si nondum orbem mala nostra piarunt,
 Et placet infandum pœnæ genus, en, ait, adsum
 Victima, lethiferoque libens succedo dolori.
 Cerne tamen sudore madens et sanguine corpus,
 Et si nulla super nostræ tibi cura salutis,
 At saltem solare animum non digna ferentem.
 Dixit et humentes oculos ad sydera tollens,
 Quas non ille preces, quæ non suspiria fudit
 Anxius ærumnisque gravis, tuæ, rector Olympi,
 Dum satagit, mentemque futuræ accingere pugna ⁽¹⁾
 Sponte parat? Cœlo intercæ demissus ab alto
 Aliger, ut varios animi componeret æstus,
 Improvisus adest, ceciditque repente fragorum
 Turba minax, auctaque supermo robore vires
 Despectant longè pœnas, nondumque paratæ
 Incubere Cruci : nam cur, supreme, moraris
 Rector, ait, cur me per tanta pericula vectum
 Sistis, inexplotoque obices opponis amori?
 Dixerat, humanisque iterum succumbere curis
 Visa caro, tristes agitant præcordia motus,
 Necdum securo gressu vestigia ponit.
 Hæc inter dubiæ mentis certamina totam
 Noctem orat, socios altus sopor urget inertes,
 Quos decuit vigiles oranti impendere curas.
 Heu pavidæ mentes, si nec cœlestia tangunt,

(1) *Lisez* pugnav.

Nec vere virtutis honos, hoc munere saltem
Defungi jurata fides, jussunque magistri
Debuit una sequi; sed jam strepit undique murmur,
Et segni tenebras abrumpunt lumine tædæ;
Quò se cumque feret, jam vis inimica propinquat,
Fictaque adorantis species, verique dolores
Non procul. Infausti tandem sub pondere ligni
Deficit, affixusque cruci, jam verbera passus,
Jam spinas, laceros spargens tormenta per artus
Nempe urgebat amor, nostræque cupido salutis,
Humanam egressus sortem, mortique tremendus
Dum fieret morti propior, fremitusque, minasque,
Et conjuratæ spernens convicia turbæ,
Degeneri vitam populo pacemque precatur,
Nec, quas ipse tulit pœnas, tortoribus optat.
Et jam finis erat, violataque pectora puri
Muricis undantes spargebant undique rivos.
Nec tamen imbelli subiit fata ultima mente;
Quin magis assurgens, divinaque lumina, Cœlo
Sic propior, vocemque sonoram ad sydera tollens,
Summe Deus, quid me moribundum deseris, et jam
Semianimem, populique tuoque furore fatigas?
Sat tibi, sat mundo dedimus, finitaque dudum
Singula præscriptas habuere oracula metas.
Sic fatur moriens, elataque lumina rursùm
Figit humi, nec jam Cœlum spectare facultas
Ulla datur, cecidere animi, marcentiaque ora
Æthereo vocem extremam fudere parenti :
Hanc tibi, summe parens, animam commendo, nec ultra
Prosiliit, vitamque simul cum voce reliquit.
Haud secus extremo videas spiramine lychnum
Ingentem nisu valido producere lucem,
Et sursùm elatas, iterum subsidere flammæ,

Donec anhelanti similem circumfluit humor
Deserit, et densæ subeunt fuliginis undæ.
Debilis interea visa est scintilla per umbras
Semianimes atris miscere vaporibus ignes.
Deficiunt tandem et vano conamine sursùm
Evecti, æternis noctis conduntur in umbris.
Nec tamen æternæ claudent tua lumina noctes,
Nate Deo, veram referet lux tertia lucem,
Et majora dabit renovato lumina mundo.

Quò me, quò, Balzace, rapis? juvat ire per altum
Exemplo quocunque tuo me musa vocarit,
Exiguo sine te vix suffectura labori;
Scilicet optati venient tanto Auspice versus,
Et quo Pierij frueris super ardua montis
Editus, hoc olim forsan potietur honore
Balzaco proles non inficianda parenti.

XIII.

NOTES CRITIQUES

SUR LES

HARMONIQUES DE MANUEL BRYENNE ⁽¹⁾.

I.

NOTATA QUEDAM AD MANUELEM BRYENNIUM.

In libro primo, capite περὶ συστήματος, loco horum verborum : τῶν πρὶν τε καὶ δύο λειμμάτων, legendum : τόνων πέντε καὶ δύο λειμμάτων ⁽²⁾.

In libro 2^o, pag. 2^a : καὶ ἐσφοδρότητες, legendum : καὶ αἱ σφοδρότητες ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Manuscrit grec 2460 de la Bibliothèque nationale. Copié au xvi^e siècle, sur papier, de 218 feuillets, in-folio, et relié en veau fauve. Ce volume, après avoir appartenu à l'archevêque de Toulouse, Charles de Montchal († 1651), dans la bibliothèque duquel il portait le n^o XLIV, puis sans doute au surintendant Fouquet et à Ant. Faure, passa dans la collection de l'archevêque de Reims, Le Tellier, qui le donna au Roi avec ses autres manuscrits en 1700. On y trouve le recueil suivant des auteurs grecs qui ont traité de la Musique :

Alypiū isagoge musica (fol. 1^{vo}) ; — *Gaudentii isagoge harmonica* (fol. 1^{ro}) ; — *Anonymi opusculum de re musica* : Ὑποῶς συνέστηκεν... (fol. 2^o) ; — *Bacchi senioris isagoge musica* (fol. 3^o) ; — *Anonymi isagoge musica* : Τῶ μυσικῇ τέλει... (fol. 36) ; — *Euclidis isagoge harmonica et sectio musici canonis* (fol. 40) ; — *Theonis Platonici summa et conspectus totius musica* (fol. 50) ; — *Pappi excerpta de re musica* (fol. 51^{vo}) ; — *Aristoxeni harmonicorum elementorum* libri III (fol. 58) ; — *Nicomachi Grasei harmonices enchiridion*, libri II (fol. 80) ; — *Aristidis Quintiliani de musica* libri III (fol. 97) ; — *Manuelis Bryennii harmonicorum* libri I et II (fol. 145 à 201).

Les notes autographes de Fermat, dont nous devons la découverte à M. Henri Omont, sous-bibliothécaire au département des Manuscrits, forment un petit cahier de papier, in-4^o (fol. 203 à 218), relié à la fin du manuscrit ; seuls les fol. 206, 208 à 214 et 216 à 218 sont écrits.

⁽²⁾ Ms., ch. VI, fol. 158, l. 18 ; édition Wallis (Oxford, 1699, f^o), p. 383, l. ult.

⁽³⁾ Ms., ch. I, fol. 162^{vo}, l. 10 ; éd. p. 394, l. 13.

Ibid. : συμφώνουσι δὲ φθόγγοι πρὸς ἀλλήλους, ὧν θηπέρου κρουσθέντος ἐπὶ τινος ὀργάνου τῶν ἐνταυτῶν, καὶ ὁ λοιπὸς κατὰ τινὰ οἰκειότητα καὶ συμπάθειαν συναγγεῖ (¹). Hæc verba videntur ad verbum descripta ex fragmento Theonis, pag. 3^a (²). Ibi, loco horum verborum : ὀργάνου τῶν ἐνταυτῶν, legitur in manuscripto : τῶν ἐν τούτοις, sed manifestum in utroque est mendum; legendum τῶν ἐνταυτῶν. Esse enim tria instrumentorum genera apud veteres musicos notum, quæ Nichomachus in Enchiridio πνευματικὰ ἐνταυτὰ et κρουστικὰ appellat. Ἐνταυτῶν vero, sive quæ chordis tensis constant, hæc est proprietas quam hoc loco indicat Bryennius, ut unâ ex duabus chordis consonantibus pulsatâ, altera statim occultâ quâdam sympathiâ resonet.

Pag. 4^a : τὰ γὰρ ἐννέζ οὐχ οἶον τε διαιρεθῆναι εἰς ἕξ (³). Tonum bifariam dividi non posse ut probet, hanc rationem subdit. Male. Non enim quia numerus 9 in duas æquales partes dividi non potest, ideo tonus seu proportio sesquioctava bifariam dividi non potest. Aut igitur erravit Bryennius, aut (quod probabilius est) sunt hæc verba glossema scioli cujusdam, quæ e margine in textum irrepserunt. Vera enim ratio hujus impossibilitatis tam in ratione sesquioctavâ quam in reliquis superparticularibus hæc est, quoniam inter duos numeros unitate distantes non cadit medius proportionalis neque in integris, quod per se patet, neque in fractis, cujus propositionis demonstratio est in proclivi.

Pag. 5^a, lin. 5^a, lin. : καὶ ἐπόγδοον καὶ ἐπιπενταξιδέξαντον, legendum : ἐπόγδοον καὶ ἐπιένναντον (⁴).

Pag. 7^a, in fig. 1^a, loco ultimi numeri ξδ, legendum ξγ (⁵), hoc est 63, non 64.

Pag. 8^a, in 1^a fig. (⁶). Omnes numeri tetrachordum constituentes sunt corrupti, aut male huc ex 2^a fig. ejusdem paginae translati. Ita autem

(¹) Ms., *ibid.*, l. 17; éd. p. 394, l. 23 (*éd.* καὶ supprimé avant συμπάθειαν).

(²) Ms., fol. 51, l. 6; éd. Bouillau, 1644, in-4^o, p. 80, l. 12.

(³) Ms., fol. 163^{vo}, l. 21; éd. p. 396, l. 13.

(⁴) Ms., fol. 164, l. 5 du bas; éd. p. 397, l. 18 du bas.

(⁵) Ms., fol. 165; éd. p. 399.

(⁶) Ms., fol. 165^{vo}; éd. p. 400.

se habent : $\tau\tilde{\epsilon}\eta$, $\tau\tilde{\zeta}$, $\tau\mu\eta$, $\sigma\sigma$, quorum loco substitui debent sequentes : $\pi\pi$, $\sigma\sigma$, $\sigma\nu\beta$, $\sigma\iota$, hoc est : 280, 270, 252, 210.

Corrigendi et numeri proportionum constitutivi, quos in vertice figuræ ita scriptos vides : ἐπὶ $\mu\zeta$, ἐπὶ $\iota\delta$, ἐπὶ ζ , legendum horum loco : ἐπὶ $\kappa\zeta$, ἐπὶ $\iota\delta$, ἐπὶ ϵ ⁽¹⁾.

In 2^a figura tertius numerus finalis debet corrigi, et loco $\tau\mu\eta$, legendum $\tau\mu\epsilon$.

Pag. 10^a, ubi scribitur ἄρῳνοι ἤτοι κακάρῳνοι καὶ ἐμμελεῖς, legendum ἐμμελεῖς, aut ἀμμελεῖς ⁽²⁾, ut constet sensus.

Pag. 12^a. Ἄλλ' οὗτοι δὲ μόνον οἱ πεντεκαίδεκα ἐπιμόριοι λόγοι εἰσὶν ἐξ ἀπαντος τοῦ τῶν ἐπιμορίων λόγων πλήθους· οἱ σύντριψις πῶς ἀλλήλοις συναπτομένοι, δύνανται τὸν ἐπίτριτον ἀποτελεῖν λόγον, καὶ οὐδένες ἄλλοι παρὰ τούτους ἐν οὐδεμιᾷ μηχανῇ τοῦτο ποιεῖν δύνανται ⁽³⁾. Non possum hoc loco dissimulare Bryennii errorem audacter nimis et confidenter asserentis nullas alias in omni superparticularium multitudine inveniri rationes præter quindecim ab eo superius assignatas, quarum tres simul sumptæ sesquiterciam componant. Ab eo supra allatæ pag. 3^a hujus libri sunt sesquiquarta, sesquiquinta, sesquisexta, sesquiseptima, sesquioctava, sesquinona, sesquidecima, sesquiundecima, sesquidecima quarta, sesquidecima quinta, sesquivigesima, sesquivigesima prima, sesquivigesima tertia, sesquivigesima septima, et sesquiquadragesima quinta, quas proposito dumtaxat satisfacere affirmat. Contrarium facillime probamus. Ecce enim sesquiducentesimam quinquagesimam quintam, quæ hos quatuor terminos dabit

$$256 \quad 255 \quad 240 \quad 192.$$

Ex quibus fiunt tres proportionones superparticulares, nempe sesquiducentesima quinquagesima quinta, sesquidecima sexta et sesquiquarta, quæ simul junctæ sesquiterciæ æquantur contra mentem authoris, imò et infra terminos ab eo allatos aliæ inveniuntur. Nam ex

(1) Dans ces expressions, le mot ἐπὶ ne devrait pas porter l'accent grave.

(2) Ms., fol. 166^v, l. 10 du bas; éd. p. 402, l. 16 (ἐμμελεῖς).

(3) Ms., ch. II, fol. 167^v, l. 16; éd. p. 403, l. 8 du bas.

sesquidecimà tertià, sesquiduodecimà et sesquiseptimà simul junctis conflatur sesquitertia; item ex sesquidecimà nonà, sesquidecimà octavà et sesquiquintà etc. Cui speculationi pulcherrimum problema subjungeremus, si per otium liceret : Nempe datà qualibet proportionē superparticulari invenire quot modis in tres proportionē superparticulares dividi possit, aut generalius, quot modis in datum proportionum superparticularium numerum dividi possit, verbi gratià, quot modis proportio sesquioctava in decem proportionē superparticulares dividi possit. Proponatur, si placet, hoc problema solvendum omnibus hujus ævi mathematicis. Ejus certe notitiam veteres et musicos et mathematicos latuisse verisimile est, cum Bryennium alioquin peritissimum et exactissimum fugerit.

In cap. 10^o, pag. 2^a, in numeris versus figuræ verticem atramento depictis, loco α , legendum η , hoc est 8, non 20 (¹). Hi enim numeri sunt differentie numerorum qui proportionē constituunt et qui ordine restitui debent versus figuræ finem, nempe $\sigma\alpha\delta$, $\sigma\iota\zeta$, $\rho\pi\theta$, $\rho\xi\eta$.

Pag. 4^a, deest quartus numerus in vertice figuræ, nempe post tres $\alpha\tau\mu\delta$, $\alpha\sigma\zeta\zeta$, $\alpha\rho\lambda\delta$, ponendus quarto loco $\alpha\eta$, hoc est 1008.

Media proportio malè exprimitur in vertice, nam non ἐπὶ $\alpha\zeta$ legendum, sed ἐπὶ ζ simpliciter, hoc est sesquiseptima, non sesquivigesima septima.

In numeris atramento depictis loco primi numeri $\pi\delta$, legendum et reponendum ut in reliquis $\rho\iota\beta$ (²).

In eadem pagina, ubi legitur : ἡ δὲ παρυπάτη πάλιν τούτου διατόνου ὑμαλοῦ γένους συντονωτέρα ἐστὶ τῆς παρυπάτης τοῦ μαλακοῦ ἐντόνου ἐπειροσσεβόδωφ λόγῳ ἔγγιστα, legendum ἐπὶ ἐννάτῳ καὶ δεκάτῳ λόγῳ ἔγγιστα (³).

In numeris proportionum differentias exprimentibus qui a vertice

(¹) Ms., ch. X, fol. 183^{vo}; éd. p. 431.

(²) Ms., fol. 184^{vo}; éd. p. 433.

(³) Ms., *ibid.*, l. 12 (ms. τοῦ διατόνου); éd. p. 433, l. 9 du bas (τοῦ διατόνου... ἐντόνου γένους). Wallis a d'ailleurs corrigé ἐπειροσσεβόδωφ.

figurae versus finem sive $\alpha\alpha\tau\acute{\alpha}$ $\sigma\tau\acute{\iota}\chi\sigma\upsilon\varsigma$, ut Graeci loquuntur, protenduntur, loco $\acute{\epsilon}\pi\iota$ θ , legendum $\acute{\epsilon}\pi\iota$ $\iota\theta$, hoc est 19, non 9 ⁽¹⁾.

In sequente figurâ desunt duo numeri parhypaten et lichanon syntoni diatoni exprimentes, qui sunt $\alpha\tau\acute{\alpha}$ et $\alpha\rho\alpha$, hoc est 1260 et 1120 ⁽²⁾.

Eâdem pagina 5^a, lin. 6^a, ubi legitur $\acute{\epsilon}\pi\iota$ $\tau\rho\iota\alpha\chi\sigma\sigma\tau\omega$ $\lambda\acute{o}\gamma\omega$ $\xi\gamma\gamma\iota\sigma\tau\alpha$, delenda vox $\xi\gamma\gamma\iota\sigma\tau\alpha$, hic et inferius eâdem pagina ⁽³⁾, ubi de eâdem proportione fit mentio. Accurata enim est proportio 36. ad 35. ad differentiam parhypates prioris et posterioris tetrachordî exprimentam.

Huc usque prosecti, omnes fere figuras corruptas cum cerneremus usque ad finem libri, proclivius duximus errores ob oculos ponere communis figurae beneficio, ne aliter obscurior esset glossa quam textus.

Quae iteratâ lectione visa sunt emendanda hic apposuimus.

Libro 1^o, cap. 1^o, pag. 4^a, lineâ ultimâ, ubi in manuscripto legitur $\alpha\alpha\iota$ $\tau\acute{\alpha}$ $\pi\acute{\alpha}\theta\eta$ $\tau\omega\upsilon$ $\phi\rho\upsilon\sigma\iota\alpha\omega\upsilon$ $\epsilon\iota\varsigma$ $\omega\upsilon$ $\gamma\acute{\iota}\gamma\gamma\omicron\nu\omicron\tau\alpha\iota$, legendum : $\epsilon\iota\delta\omega\upsilon$ $\gamma\acute{\iota}\gamma\gamma\omicron\nu\omicron\tau\alpha\iota$ ⁽⁴⁾.

Pag. 5^a, lin. 21^a, $\tau\omega\upsilon$ $\mu\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ $\tau\omega\upsilon$ $\acute{\eta}\mu\iota\sigma\lambda\acute{\iota}\omicron\upsilon$, legendum : $\tau\omega\upsilon$ $\acute{\eta}\lambda\acute{\iota}\omicron\upsilon$ ⁽⁵⁾.

Cap. 2^o, lin. 8^a, $\pi\epsilon\rho\iota$ $\tau\omega\upsilon$ $\acute{\eta}\rho\mu\omicron\sigma\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon$ $\sigma\alpha\phi\acute{\eta}\nu$ $\epsilon\acute{\iota}$, legendum : $\sigma\alpha\phi\acute{\eta}\nu\epsilon\iota\alpha\upsilon$ ⁽⁶⁾.

Cap. 3^o, pag. 2^a, lin. 11^a, $\alpha\alpha\iota$ $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\epsilon\varsigma$ $\tau\acute{o}\nu$ $\tau\omega\upsilon\tau\omicron\tau\omicron\nu$ $\phi\alpha\iota\upsilon\acute{o}\mu\epsilon\upsilon\omicron\nu$ $\pi\omicron\iota\epsilon\acute{\iota}\nu$, $\nu\acute{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\tau\iota$ $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\iota\nu$ $\phi\alpha\sigma\acute{\iota}$, $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ $\acute{\alpha}\delta\epsilon\iota\nu$, corrige : $\alpha\alpha\iota$ $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\epsilon\varsigma$ $\tau\omega\upsilon\varsigma$ $\tau\omega\upsilon\tau\omicron$ $\phi\alpha\iota\upsilon\acute{o}\mu\epsilon\upsilon\omicron\upsilon\varsigma$ $\pi\omicron\iota\epsilon\acute{\iota}\nu$ ⁽⁷⁾.

⁽¹⁾ Voir note 2, p. 397.

⁽²⁾ Ms., fol. 185; éd. p. 434.

⁽³⁾ Ms., *ibid.*, l. 6 (ms. $\tau\rho\iota\alpha\chi\sigma\sigma\tau\omega$ $\pi\acute{\epsilon}\mu\pi\tau\omega$); éd. p. 434, l. 19 ($\tau\rho\iota\alpha\chi\sigma\sigma\tau\omicron\pi\acute{\epsilon}\mu\pi\tau\omega$); cf. ms., *ibid.*, l. 6 du bas, et éd. l. 3 du bas. — L'omission de $\pi\acute{\epsilon}\mu\pi\tau\omega$, dans le texte de Fermat, est due à une simple inadvertance.

⁽⁴⁾ Ms., ch. I, fol. 147, l. ult.; éd. p. 363, l. 14.

⁽⁵⁾ Ms., fol. 147^{vo}, l. 21; éd. p. 364, l. 5.

⁽⁶⁾ Ms., ch. II, fol. 149^{vo}, l. 15; éd. p. 367, l. 5 du bas. Le ms. porte : $\sigma\alpha\phi\acute{\eta}\nu\epsilon\iota\theta$ (= $\sigma\alpha\phi\acute{\eta}\nu\epsilon\iota\alpha\upsilon$).

⁽⁷⁾ Ms., ch. III, fol. 154, l. 11 (ms. et éd. $\phi\alpha\sigma\acute{\iota}\nu$); éd. p. 376, l. 3 ($\tau\acute{o}\nu$ $\tau\omega\upsilon\tau\omicron$ $\phi\alpha\iota\upsilon\acute{o}\mu\epsilon\upsilon\omicron\nu\omicron\varsigma$).

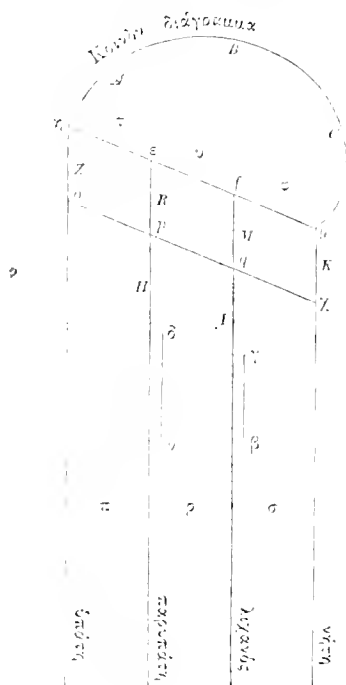
Cap. 4^o, pag. ult., lin. 14^a, διὰ τῶν μὲν εἰσιν οὐ μὴν δὲ καὶ ἐμμελεῖς, legendum ἐμμελεῖς (¹).

II.

RESTITUTIO FIGURARUM LIBRI 2ⁱ APUD MANUELEM BRYENNUM.

Figure tetrachordorum sunt aut simplices aut compositae (²). Simplicium constructio aut restitutio est in promptu; compositas ita restitues, adhibita constructione et ad eam reliquis accommodatis. Esto

Fig. 151 (Figura ultima, cap. 9).



igitur figura ultima capituli 9ⁱ, quae per characteres graecos et latinos denotatur, et $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\omicron\pi\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega$ vicem gerit.

(¹) Ms., ch. IV, fol. 156^o, l. 14; éd. p. 380, l. 4 du bas.

(²) Les tétrachordes grecs comprennent quatre cordes désignées ici, dans l'ordre de longueur décroissant, par les noms d'*hypate*, *parhypate*, *lichanos*, *nete*. Les extrêmes sont toujours dans le rapport de 4 à 3, mais les rapports intermédiaires varient suivant les genres.

Manuel Bryenne connaît huit genres, pour lesquels les trois rapports intermédiaires

Ita nempe emendari et recte construi debet.

Supra semicirculum ABC hæc verba poni debent : *καινὸν τετράγωνον δὸν διατόνου ὁμαλῶς καὶ τοῦ συντόνου διατόνου γένους.*

In rectâ $\gamma\varepsilon$: ἐπὶ $\iota\varepsilon$.

In rectâ εf : ἐπὶ γ_1 .

In rectâ $f g$: ἐπὶ θ .

In rectâ op : ἐπὶ $\iota\alpha$.

In rectâ $p q$: ἐπὶ ι .

In rectâ $q \chi$: ἐπὶ θ .

In Z : $\frac{1}{2}\xi$.

In R : $\frac{1}{2}$.

In M : π .

In K : $\varphi\beta$.

In τ : ς .

In υ : ι .

In φ : γ_1 .

successifs, en allant de l'*hypate* à la *nete* (rapports dont le produit doit faire $\frac{2}{3}$), sont consignés dans le Tableau ci-dessous :

I.	Ditonien (<i>διτονικὸν</i>)	$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$	$\times \frac{9}{8}$	$\times \frac{9}{8}$
II.	Syntone diatone (<i>σύντονον διατόνον</i>)	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3}$	$\times \frac{9}{8}$	$\times \frac{10}{9}$
III.	Diatone égal (<i>διατόνον ὁμαλόν</i>)	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3}$	$\times \frac{11}{10}$	$\times \frac{10}{9}$
IV.	Mol tendu (<i>μολικὸν ἔντονον</i>)	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$	$\times \frac{8}{7}$	$\times \frac{9}{8}$
V.	Mol diatone (<i>μολικὸν διατόνον</i>)	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$	$\times \frac{10}{9}$	$\times \frac{8}{7}$
VI.	Chromatique syntone (<i>χρωμα σύντονον</i>)	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$	$\times \frac{12}{11}$	$\times \frac{7}{6}$
VII.	Chromatique mol (<i>χρωμα μολικόν</i>)	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$	$\times \frac{15}{14}$	$\times \frac{6}{5}$
VIII.	Enharmonique (<i>ἐναρμόνιον</i>)	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$	$\times \frac{5}{4}$	$\times \frac{7}{6}$

Les figures simples donnent en nombres entiers les longueurs des cordes de chaque genre; Fermat a déjà plus haut indiqué des corrections pour les figures simples suivantes :

Fol. 165. Mol diatone. — Fol. 165^{vo}, $f g$, 1. Chromatique mol. — *Ibid.*, $f g$, 2. Enharmonique. — Fol. 183^{re}, Mol tendu.

Les figures composées donnent en nombres entiers les longueurs des cordes de deux genres comparés l'un à l'autre. Fermat a déjà touché plus haut (fol. 181^{re}) la comparaison du *mol tendu* et du *diatone égal* et (fol. 185) celle du *mol tendu* et du *syntone diatone*. Il reprend maintenant l'exposé du système de ses corrections sur la première figure composée de Manuel Bryenne (*syntone diatone* et *diatone égal*) et sur la suivante (*mol tendu* et *diatone égal*), qu'il avait déjà corrigée.

In H : $\pi\eta$.

In I : π .

In π : η .

In ρ : η .

In σ : η .

In rectâ $\delta\nu$: $\varepsilon\pi\lambda\mu\delta$.

In rectâ $\gamma\beta$ nihil in hac figura poni debet quia lichanos diatoni aequalis et lichanos diatoni syntoni sunt aequales.

Figura 3^a capitis 10ⁱ (1).

Supra semicirculum ABC , κοινὸν τετραγώνον τοῦ μαλακοῦ ἐντόνου γένους καὶ τοῦ διατόνου ὁμαλοῦ.

In rectâ $\eta\varepsilon$: $\varepsilon\pi\lambda\zeta$.

In rectâ $\varepsilon\zeta$: $\varepsilon\pi\lambda\zeta$.

In rectâ $f\zeta$: $\varepsilon\pi\lambda\eta$.

In rectâ op : $\varepsilon\pi\lambda\iota\alpha$.

In rectâ $p\eta$: $\varepsilon\pi\lambda\iota$.

In rectâ $q\eta$: $\varepsilon\pi\lambda\theta$.

In Z : $\alpha\pi\mu\delta$.

In R : $\alpha\sigma\zeta$.

In M : $\alpha\sigma\lambda\delta$.

In K : $\alpha\eta$.

In τ : $\mu\eta$.

In υ : $\rho\zeta\beta$.

In ϕ : $\rho\chi\varsigma$.

In H : $\alpha\sigma\lambda\beta$.

In I : $\alpha\rho\chi$.

In π : $\rho\iota\beta$.

In ρ : $\rho\iota\beta$.

In σ : $\rho\iota\beta$.

In rectâ $\delta\nu$: $\varepsilon\pi\lambda\iota\theta$.

In rectâ $\gamma\beta$: $\varepsilon\pi\lambda\pi$.

(1) Voir plus haut, page 397, note 2.

Eadem methodo in reliquis procedemus, sed, ne figuram integram construere cogamur, deinceps errata tantum indicabimus et restituemus, aut quae desunt supplebimus. Quod ut commodius fiat, sciendum perpetuâ et uniformi methodo quid valeant aut indicent singuli characteres.

Rectae $\tau\varepsilon$, εf , $f g$ denotant proportiones chordarum unius ex tetrachordis.

Characteres Z , R , M , K denotant terminos harum proportionum.

Characteres τ , ν , φ differentias horum terminorum.

Rectae op , pq , qz proportiones chordarum alterius ex tetrachordis.

Characteres Z , H , I , K terminos harum proportionum; primum quippe et ultimum terminum duo tetrachorda communem habent.

Characteres π , φ , τ differentias horum terminorum.

Denique recta $\delta\nu$ indicat proportionem parhypates prioris et posterioris tetrachordi.

Et recta $\gamma\beta$ proportiones hypates ⁽¹⁾ prioris et posterioris tetrachordi.

In 1^a figura ejusdem capitis ⁽²⁾ desunt duo numeri ita supplendi :

In H : $z\sigma\xi$.

In I : $z\varphi z$.

In 3^a figurâ cap. 11ⁱ, ita corrige ⁽³⁾ :

In rectâ $\tau\varepsilon$: $\varepsilon\pi\lambda z$.

In 4^a figurâ ejusdem capitis, ita corrige ⁽⁴⁾ :

Numerus K : $\sigma\nu\beta$.

Desunt numeri H et I , ita supplendi :

In H : $\tau\varepsilon$.

In I : $\sigma\pi$.

(1) *Lisez lichani au lieu de hypates.*

(2) *Mol tendue et syntone diatone. Voir plus haut, p. 398, note 2.*

(3) *Mol diatone et diatone égal.*

(4) *Mol diatone et syntone diatone.*

Figura 5^a ita restitui debet, corruptissima enim est in manuscripto ⁽¹⁾ :

In rectâ $\gamma\varepsilon : \varepsilon\pi^{\flat} z$.

In rectâ $\varepsilon f : \varepsilon\pi^{\flat} \theta$.

In rectâ $f g : \varepsilon\pi^{\flat} \zeta$.

In rectâ $op : \varepsilon\pi^{\flat} z\zeta$.

In rectâ $p q : \varepsilon\pi^{\flat} \zeta$.

In rectâ $q \gamma : \varepsilon\pi^{\flat} \gamma$.

In $Z : \gamma\gamma^{\flat}$.

In $R : \gamma\mu$.

In $M : \varphi\varphi\varsigma$.

In $K : \varphi\delta$.

In $H : \gamma\mu\gamma$.

In $I : \varphi\zeta\zeta$.

In $\tau : \lambda\beta$.

In $\nu : \xi\delta$.

In $\varphi : \phi\beta$.

In $\pi : \alpha\delta$.

In $\rho : \pi\alpha$.

In $\sigma : \xi\gamma$.

In rectâ $\delta\nu : \varepsilon\pi^{\flat} \pi$.

In rectâ $\gamma\beta : \varepsilon\pi^{\flat} \xi\gamma$.

In figura 3^a cap. 12^a, desunt aut corrupti sunt termini proportionum ita supplendi ⁽²⁾ :

In $Z : \sigma\xi\delta$.

In $R : \sigma\nu\beta$.

In $M : \sigma\lambda\alpha$.

⁽¹⁾ *Mol diatone et mol tendu*.

⁽²⁾ *Chromatique syntone et diatone égal*. Dans cette figure et dans la suivante, Manuel Bryenne avait pris, pour les cordes du genre *chromatique syntone*, les longueurs : 288, 275, 252, 216, dont la seconde est seulement approchée, et prise au lieu de $274\frac{10}{11}$, longueur théorique.

$$\text{In } K : \rho \zeta \eta.$$

$$\text{In } H : \tau \mu \beta.$$

$$\text{In } I : \tau \kappa.$$

Emendanda etiam horum differentiae :

$$\text{In } \tau : \iota \beta.$$

$$\text{In } \upsilon : \kappa \kappa.$$

$$\text{In } \varphi : \lambda \gamma.$$

In π : ρ : et τ : reponendum $\kappa \beta$: sunt enim hæ tres differentiae æquales.

In figura 4^a ejusdem capitis (¹) eàdem opus est emendatione :

$$\text{In } Z : \varphi \kappa \eta.$$

$$\text{In } R : \varphi \delta.$$

$$\text{In } M : \upsilon \xi \beta.$$

$$\text{In } K : \tau \zeta \varsigma.$$

$$\text{In } H : \upsilon \zeta \xi.$$

$$\text{In } I : \upsilon \mu.$$

Similiter :

$$\text{In } \tau : \kappa \delta.$$

$$\text{In } \upsilon : \mu \beta.$$

$$\text{In } \varphi : \xi \varsigma.$$

$$\text{In } \pi : \lambda \gamma.$$

$$\text{In } \rho : \upsilon \varepsilon.$$

$$\text{In } \sigma : \mu \delta.$$

In figurâ 5^a ejusdem cap. ita corrigendum est (²) :

$$\text{In } Z : \beta \upsilon \xi \delta.$$

$$\text{In } R : \beta \tau \nu \beta.$$

(¹) *Chromatique syntone et syntone diatone.*

(²) *Chromatique syntone et mol tendu.* Manuel Bryenne avait pris pour les cordes du *mol tendu* les longueurs : 704, 679, 594, 528. La seconde n'est qu'approchée, au lieu de 678 $\frac{6}{7}$.

In M : $\beta\rho\nu\zeta$.

In K : $\omega\mu\tau_1$, 1848.

In H : $\beta\tau\sigma\zeta$.

In I : $\beta\sigma\theta$.

In τ : $\rho\iota\beta$.

In υ : $\rho\iota'\zeta$.

In φ : $\tau\tau_1$.

In π : $\pi\tau_1$.

In ρ : $\sigma\iota''\zeta$.

In σ : $\sigma\lambda\alpha$.

In rectâ $\delta\nu$: $\varepsilon\pi\iota$ $\iota'\tau_1$. Sed et in textu, eâdem paginâ, lin. 5^a, loco $\varepsilon\pi\iota\text{-}\varepsilon\nu\nu\varepsilon\tau\eta\chi\sigma\sigma\tau\sigma\acute{\epsilon}\alpha\tau\omega$, reponendum $\varepsilon\pi\iota\varepsilon\nu\nu\varepsilon\tau\eta\chi\sigma\sigma\tau\sigma\sigma\gamma\delta\acute{\epsilon}\omega$. Eadem emendatio in lin. 22^a ejusdem paginae fieri debet.

In figura 6^a ejusdem capituli, corrige (¹) :

In R : $\chi\psi\xi\delta$.

In K : $\chi\tau\pi\zeta$.

In H : $\chi\psi\xi$.

In π : $\pi\tau_1$.

In figurâ 3^a cap. 13 (²) :

In rectâ op : $\varepsilon\pi\iota\varepsilon\nu\delta\acute{\epsilon}\alpha\tau\tau\sigma\zeta$.

In figurâ 4^a ejusdem cap. ita corrigendum (³) :

In Z : $\chi\gamma\pi$.

In R : $\chi\gamma\chi$.

In M : $\chi\varphi\iota\beta$.

In K : $\chi\sigma\xi$.

In H : $\chi\varphi\sigma\varepsilon$.

In I : $\chi\upsilon$.

(¹) *Chromatique syntone et mol diatone.*

(²) *Chromatique mol et diatone égal.*

(³) *Chromatique mol et syntone diatone.* Manuel Bryenne avait pris, pour les cordes du *chromatique mol*, les longueurs : {80, {63 (au lieu de {62 $\frac{6}{7}$), 432, 360.

In τ : ξ .

In υ : $\rho\tau_1$.

In φ : $\sigma\nu\beta$.

In π : $\rho\varepsilon$.

In ρ : $\rho\omega\varepsilon$.

In σ : $\rho\mu$.

Eàdem paginà, lin. 9^a, delenda vox $\xi\gamma\gamma\sigma\tau z$, et etiam in lin. penult.

In fig. 5^a ejusdem cap. (¹) :

In K : $z\gamma\pi$.

In φ : $\pi\lambda\xi$.

In fig. 6^a ejusdem cap. (²) :

In K : $\pi\varepsilon$.

In H : υ .

In I : $\pi\xi$.

In fig. 7^a ejusdem cap. (³) :

In rectà $\tau_1\varepsilon$: $\varepsilon\pi\lambda z\xi$.

In φ : $z\omega\rho\tau_1$.

In figurà 3^a cap. 14 (⁴) :

In H : $z\mu\beta$.

In τ : $z\delta$.

In fig. 4^a ejusdem cap. (⁵) :

In rectà op : $\varepsilon\pi\lambda z\varepsilon$.

In rectà pq : $\varepsilon\pi\lambda \tau_1$.

In Z : $z\tau\delta$.

In K : $\omega z\tau_1$.

(¹) Chromatique mol et mol tendu.

(²) Chromatique mol et mol diatone.

(³) Chromatique mol et chromatique syntone.

(⁴) Euharmonique et diatone egal.

(⁵) Euharmonique et syntone diatone.

In H : $\rho\lambda\epsilon$.

In I : $\rho\alpha$.

In τ : $\alpha\delta$.

In π : $\xi\theta$.

In ρ : $\rho\iota\epsilon$.

In figurà 5^a ejusdem cap., ita corrige ⁽¹⁾ :

In Z : $\varepsilon\rho\gamma\beta$.

In R : $\varepsilon\mu$.

In M : $\rho\delta\omega\lambda$.

In K : $\rho\gamma\omega\xi\delta$.

In H : $\rho\delta\rho\xi\eta$.

In I : $\rho\delta\tau\mu\xi$.

In τ : $\rho\iota\beta$.

In υ : $\sigma\iota$.

In φ : $\rho\xi\xi$.

In π : $\rho\pi\delta$.

In ρ : $\gamma\chi\alpha$.

In σ : $\upsilon\pi\gamma$.

In figurà 6^a ejusdem cap. ⁽²⁾ :

In τ : $\rho\xi\eta$.

In υ : $\tau\iota\epsilon$.

In φ : $\alpha\upsilon\mu\theta$.

In π : $\tau\xi\eta$.

In figurà 7^a ejusdem cap. ⁽³⁾ :

In rectà $q\chi$: $\varepsilon\pi\iota\epsilon\alpha\tau\omega\varsigma$.

In Z : $\gamma_1\zeta$.

In R : $\xi\rho\alpha$.

⁽¹⁾ *Euharmonique et mol tendu*. Nombres de Bryenne pour les cordes de l'euharmonique : 1792, 1753 ($\frac{1}{23}$ négligé), 1680, 1344.

⁽²⁾ *Euharmonique et mol diatone*.

⁽³⁾ *Euharmonique et chromatique syntone*.

$$\text{In } M : \zeta \varphi'.$$

$$\text{In } \pi : \pi \xi \eta.$$

In figura ultima ejusdem cap. ita corrigendum (¹) :

$$\text{In } Z : \alpha \beta \omega \pi.$$

$$\text{In } R : \alpha \beta \gamma.$$

$$\text{In } M : \alpha \beta \circ \varepsilon.$$

$$\text{In } K : \theta \gamma \xi.$$

$$\text{In } H : \alpha \beta \circ \alpha.$$

$$\text{In } I : \alpha \alpha \varphi' \beta.$$

$$\text{In } \tau : \sigma \pi.$$

$$\text{In } \circ : \varphi \alpha \varepsilon.$$

$$\text{In } \varphi : \beta \circ \alpha \varepsilon.$$

$$\text{In } \pi : \circ \xi.$$

$$\text{In } \varphi : \omega \alpha \eta.$$

$$\text{In } \sigma : \alpha \alpha \lambda \beta.$$

Fallitur Bryennius lineâ 1^a hujus paginae; ubi enim scribit, ἐπεὶ ὁ δὲ
 $\mu\eta\tau\alpha\sigma\sigma\tau\omega\lambda\acute{\alpha}\gamma\omega$, emendandum ἐπεὶ ἔξ ἡ $\tau\alpha\sigma\sigma\tau\alpha\sigma\sigma\epsilon\nu\nu\acute{\alpha}\tau\omega$. Eadem emendatio et
 in lineâ antepenultimâ ejusdem capitis fieri debet (²). Ideoque in
 rectâ

$\delta\gamma$: reponendum ἐπὶ $\xi\theta$.

Proportio enim composita ex sesquivigesimâ tertiâ et sesquiquartâ
 superat compositam ex sesquidecimâ quartâ et sesquiquintâ, non pro-
 portione sesquiseptuagesimâ, ut vult hic author, sed sesquisexagesimâ
 nonâ.

In figurâ 3^a, cap. ult. (³) :

$$\text{In } H : \psi \delta.$$

$$\text{In rectâ } \gamma \beta : \varepsilon \pi \iota \sigma \gamma \delta \sigma \eta \alpha \sigma \tau \acute{\alpha} \varsigma.$$

(¹) *Enharmonique et chromatique mol.* Les nombres de Bryenne sont triples de ceux de Fermat.

(²) Ms., fol. 197^{vo}, l. 1 et 19; éd., p. 457, l. 24, et p. 458, l. 3.

(³) *Dutonien et diatone égal.*

In figurâ 4^a ejusdem cap. (¹) :

In rectâ $q\gamma$: ἐπιένονατος.

In rectâ $\delta\eta$: ἐπιογδοηξοστός.

In π : $\mu\eta$.

In ρ : π .

In σ : $\xi\delta$.

In figurâ 5^a ejusdem cap. (²) :

In rectâ $f\gamma$: ἐπιόγδοος.

In Z : $\alpha\psi\zeta\beta$.

In R : $\alpha\psi\alpha\eta$.

In M : $\alpha\psi\iota\beta$.

In K : $\alpha\tau\mu\delta$.

In H : $\alpha\psi\alpha$.

In I : $\alpha\psi\iota\beta$.

In τ : $\xi\delta$.

In υ : $\sigma\iota\varsigma$.

In φ : $\rho\zeta\eta$.

In π : $\zeta\alpha$.

In ρ : $\rho\pi\theta$.

In σ : $\rho\zeta\eta$.

In figura 6^a ejusdem cap. (³) :

In R : $\varepsilon\rho\alpha$.

In π : $\sigma\sigma\gamma$.

In textu hujus paginae, lin. 12, loco verbi ἐπιτρικξοστῶ, legendum :
ἐπιτρικξοστιστῶ (⁴).

In figurâ 7^a ejusdem cap. (⁵) :

In K : $\beta\rho\iota\beta$.

(¹) *Ditonien* et *syntone diatone*.

(²) *Mol tendu* et *ditonien*. Les nombres de Bryenne sont sextuples.

(³) *Mol diatone* et *ditonien*.

(⁴) Ms., fol. 200^{vo}, l. 11 : éd. p. 164, l. 8.

(⁵) *Chromatique syntone* et *ditonien*.

In τ : $\rho\kappa\eta$.

In ϑ : $\sigma\kappa\delta$.

In φ : $\tau\nu\beta$.

In ρ : $\sigma\mu\zeta$.

In figurâ 8^a ejusdem cap. (¹) :

In H : $\eta\eta\varphi\varepsilon$.

In I : $\zeta\varphi\zeta$.

In τ : $\tau\kappa$.

In σ : $\omega\mu$.

In hac paginâ, lin. 1^a, loco verbi ἐπιεικιστοτερον, legendum ἐπιεξή-
ριστοτερον (²).

In figurâ ultimâ ejusdem capituli (³) :

In H : $\varepsilon\varphi\pi\theta$.

In I : $\delta\eta\zeta\eta$.

Possunt in his omnibus figuris notari etiam differentiae terminorum H et I , et terminorum M et I ex alterâ videlicet parte rectarum εp et $f q$. Quod in quibusdam figuris fecit author, imo videtur in omnibus fecisse, quia integre ad nos non pervenerunt. Hoc autem in figuris ad-
dicere est in promptu.

Videtur etiam author summam numerorum τ , ϑ , φ , et summam nu-
merorum π , ρ , σ , extra figuram e regione ipsorum collocasse, quod
etiam in omnibus figuris restituere facillimum est.

Figuree simplices horum capitulum ex restitutis et emendatis superius
capitis primi figuris facillime restituentur, eadem enim sunt, quas
initio horum capitulum author repetit.

(¹) *Chromatique mol et ditonien.*

(²) Ms., fol. 201^{vo}, l. 1; éd. p. 465, l. 14.

(³) *Enharmonique et ditonien.*



VARIANTES ET NOTES CRITIQUES.

VARIANTES ET NOTES CRITIQUES.

LIEUX PLANS D'APOLLONIUS.

(Légons des *Varia* = *Va*, pages 11 à 43.)

P. 3. ligne 5 Appollonium (*aussi* 9) ★ 10 Appolloniis

P. 4. 5 à 11 = *Co* (Commandin) fol. 162 recto, ligne 8 en remontant, à fol. 162 verso, ligne 2. La ponctuation de *Co* a été conservée. ★ 7/8 spacium *Co*. ★ 17 | PROPOSITIO I. *en vedette* (*Va*, 13). ★ 22. Les figures des *Varia* ne sont pas numérotées; les renvois aux figures ont été ajoutés au texte entre parenthèses.

P. 5. 8 quamecunque

P. 6. 6 cum (*aussi* 13, 14 et 23) ★ 15 | II. PROPOSITIO. *en vedette* (*Va*, 14) ★ 23 rectang.

P. 7. Fig. 3. La figure comporte une seconde droite marquée BAD et menée par le point A de l'autre côté de CE; de même, la ligne DE est double. ★ 3 cum ★ directum] *ajoutez* comprehendentes spatium datum (*cf.* p. 9. 8). ★ 9 | aequale (*Va*, 15)

P. 8. 6 eundem ★ 16 cum ★ 27 VR | VI

P. 9. 7 cum (*aussi* 22) ★ 11 III. PROPOSITIO. *en vedette*

P. 10. 6 | habet (*Va*, 16) ★ 7 Cum

P. 11. 2 priore] *le renvoi est fait à la prop. 1, fig. 1*. ★ secunda] 2. ★ 7 tum après sensus] tam ★ 9 IV. PROPOSITIO. *en vedette* ★ 15 | describatur (*Va*, 17) ★ 21 GE | GD ★ propositionis] positionis

P. 12. 3 vel EA sub AB ★ 7 cum ★ 10 priore] prima (*le renvoi est fait à prop. 2, fig. 1*) ★ 18 *on voudrait ajouter* sed ut BA ad AC. ita HA ad GA; erit igitur ut HA ad GA. ita AD ad AI.

P. 13. 2 secundo] 2. ★ secundo] 2. ★ posueramus] perseveramus ★ 6 PROPOSITIO V. *en vedette* ★ 11 | punctum (*Va*, 18) ★ FEG] EFG ★ 15/16 similes ergo trianguli ★ 17 Cum ★ 21 occurrente

P. 14. 5 PROPOSITIO VI. *en vedette* ★ 9 | cui (*Va*, 19)

P. 15. 5 cum ★ 6 secundo] 2. (*aussi* 13) ★ 15 VII. PROPOSITIO. *en vedette*

P. 16. 7 | aio (*Va*, 20) ★ 8 cum (*aussi* 10 et Cum 12) ★ 11 synthesim ★ 20/21 pro-eueatur ★ 21 Centro D] *ajoutez*, intervallo DE.

P. 17. 3 cum ★ 4 VIII. PROPOSITIO. *en vedette* ★ 9 ductae ★ 10 | et (*Va*, 21)

P. 18. 3 demonstratis ★ 4 A et B (à corriger) ★ 10 ut II] in II ★ 14 Apollonii
★ 20 secunda] 2. ★ 21 interdum etc.] voir p. 4, 9/10 ★ 22 prima] 1

P. 19. 4 similiter etc.] voir p. 4, 9/10 ★ 11/12 = Co. 162^{vo}, l. 4 à 6 ★ 16 cum
★ 18] PROPOSITIO. III. (Va. 20) ★ 19/21 = Co. 162^{vo}, l. 6 à 8 ★ 23 Euclide, III, 33
★ 25 27 = Co. 162^{vo}, l. 8 à 10 ★ 25 spacii Co. ★ positione et magnitudine basis

P. 20. 1 Element. = Euclide, I, 40 ★ 4/6 = Co. 162^{vo}, l. 11 à 14 ★ 22 Su] per (Va.
23) ★ 24 cum

P. 21. 2 cum (aussi 4) ★ Fig. 18. Les droites CN, FO ne sont pas tracées.
★ 11 15 = Co. 162^{vo}, l. 14 à 19 ★ 11 quodam omis

P. 22. 1 specie (Va. 24) ★ 3 cum ★ 5 dimissis.

P. 23. 19 ra] tionem (Va. 25)

P. 24. 4 8 = Co. 162^{vo}, l. 19 à 25 ★ 4 quocumque Co. ★ 7 duera Co. ★ reliquis
Co. reliqua Va. ★ 10 VI] sextae ★ Voir, pour le renvoi à l'Isagoge dans la Note, la
page 93.

P. 25. 4 AB, AC] AC, AB ★ Fig. 22. Les *Varia* donnent deux figures; dans la se-
conde, qui n'a pas été reproduite, toutes les lignes sont à l'intérieur du triangle ABC, sur
les côtés duquel l'ordre des points est le suivant : ADREBKOVZIEA. ★ 18 cum (aussi 19)
★ 19 20 VE, MO] MO, VE

P. 26. 9 cum ★ 11] VE (Va. 26) ★ 20 perallelas ★ 24 porrigendas

P. 27. 4/8 = Co. 162^{vo}, l. 25 à 30 ★ 6 spacium Co. ★ 7 aequalis sit Co. sit aequalis
Va. ★ 8 spacio Co. ★ 21 eum ★ Voir, pour le renvoi à l'Isagoge dans la Note, la
page 102.

P. 28. 4] et (Va. 27) ★ Fig. 23. Les *Varia* donnent deux figures différant seulement
par l'ordre des points : AB et GCEDEF dans la première (supprimée); BA et DCEGF dans la
seconde. ★ 8 et 20 eum

P. 29. (Va. 28) ★ 3/5 = Co. 162^{vo}, l. 32 à dernière ★ 3 sunt Co. ★ 4 spacio Co.

P. 30. 3 eum ★ 12] Nam (Va. 29) ★ 16 per quartam secundi (Euclide, II, 4)
★ Voir, pour le renvoi à l'Isagoge dans la Note 2, la page 99.

P. 31. 3 AD quadrat. ★ 3/4 quartam propositionem 2^a (Euclide, II, 4) ★ 9 datum]
datum ★ 19] NC (Va. 30) ★ 23/24 Co. (162^{vo}, l. dernière à 163, l. 1) a seulement : si sint
in proportionibus data vel rectae lineae vel circumferentiae;

P. 32. 3 rectos ★ 7 ut R, quadratum ad S, et ita ★ 9 OVZ] NOZ

P. 33. 3 id est R, quadratum ad S, quadratum, ita AN, quad. ad VB, Quad. ★ 9 (Va.
31) ★ 10 11 = Co. 163, l. 1 à 7. ★ 12 fit Co sit Va. ★ 13 et om. Va. ★ 14 contingere Co.

P. 34. 7 latitudinem rectam AP (à corriger) ★ 17] rectangulum (Va. 32) ★ 21 AB
in BO] AB, in AO ★ 22 aequatur

P. 35. 4 rectangulum ★ deficiens in figura ★ 10/12 = Co. 163, l. 7 à 10 ★ 11 ma-
jor Co. ★ 12 datum Co. datum Va. ★ 13 BI] IB (à corriger)

P. 36. 5 ita] ut ★ 7 VNB (*la première fois*)] NVB ★ [Sed (*Va.* 33) ★ 8 cum ★ 11 sint ★ 13 utrinque ★ 21 datum

P. 37. 9/10 = *Co.* 163, l. 10 à 13 ★ 9 quocumque *Co.* quocumque *Va.* ★ 10 spacio *Co.* ★ 14] dico (*Va.* 34) ★ 20 cum

P. 38. 2 utrinque (*aussi* 12 et 17) ★ 5 Centro C] centro E (*sur la figure des Variæ, le centre est effectivement E*) ★ 6 CA] EA ★ 7/8 eandem ★ 10 et 12 cum

P. 39. 4 CE] AE ★ 8] Si (*Va.* 35) ★ 12 in 1. 2. et 3. (*de même, 1. 2. 3. sur les figures 37 et 38*)

P. 40. 3 in 1. ★ 4 in 2. ★ 5 in 3 ★ 6 in 1. et in 3. figura ★ 7 et 14 et 16 utrinque ★ 7 illinc] illi ★ 14 In 2. ★ 16 in 1. ★ 20 quacunq. ★ 21 (*Va.* 36) ★ in 1. figura

P. 41. 1/2 secunda et tertia ★ 3 In 1. ★ CN] EN ★ 6 AD (*la première fois*)] AB ★ 31 PRIMA] I.

P. 42. 3 spa] tio (*Va.* 37) ★ 8 Equetur] Arguetur ★ 25 At] ut

P. 43. 14] et ad (*Va.* 38) ★ 15 DM] p. c. OM, DM ★ 19 NM] DNM ★ Fig. 41. Les *Variæ* donnent ici trois figures : la première a été reproduite plus loin (fig. 42); elle est accompagnée de la légende « AD 4. pars AB 2. + E. » c. a. d. $AD = \frac{1}{2}(2AB + AE)$; la seconde a pour légende « AD 4. pars AB + E. » (*lisez* encore AE au lieu de E) et ne diffère de la troisième (fig. 41) qu'en ce que le point B est entre le point E et le point N de droite; la légende de la troisième est « AD 4. pars AB + AE. » ★ 21 Aquetur

P. 44. 8 BM] EM ★ 12 Q] Z (*sur la figure 43, la lettre Z est inscrite en dehors pour représenter le plan donné Z*) ★ 13 QI] ZI

P. 45. 1 QR] ZR ★ 4 QO] ZO ★ QR] ZR ★ 6] plano (*Va.* 39) ★ 13 cum ★ 23 utrinque ★ 28 secundo] 2. ★ 31 DY] DI

P. 46. 2 quadrata ta ★ 6 VI] QI ★ 10 probandum ★ 14] et (*Va.* 40) ★ 16 quodlibet] quotlibet (*à corriger*)

P. 47. 2 sexties ★ 3 D] B ★ 9 recta assignata ★ Fig. 45. La lettre O manque. ★ 16 conditionata ★ 18] sextans (*Va.* 41)

P. 48. 2/6 = *Co.* 163, l. 13 à 18.

P. 49. 6 hypotesi ★ Fig. 47. La lettre O manque. ★ 12] LA (*Va.* 42) ★ 13/14 propositionem tertiam Appollonii triangulum EOB ★ 15 utrinque (*aussi* 21, 23, 26) ★ 22 auferetur ★ 25 sive] sine

P. 50. 1 IAO] IOA ★ quadratis] quadrato ★ 3 Ceasus ★ 5/10 = *Co.* 163, l. 18 à 24 ★ 12 propos. 157. libri septimi (*cf. Pappus*, éd. Hultsch, p. 910-913) ★ 13 jusqu'à P. 51. 13 = *Co.* 260^o à 261 ★ 17 quodeunque

P. 51. 4/5 sunt... propterea] *Co.* *disait* : et angulus ad A utrisque communis, erit et reliquis reliquo aequalis et triangulum triangulo simile : quare, cum sit ut FA ad AL ita EA ad AB, erit ★ 7 ex (*après* quadratis) *Co.* *om. Va.* ★ 10 quadrato (*Va.* 43) ★ 11 EAL] *Co.* *ajoute* ut demonstravimus ★ 13 FG *Co.* EG *Va.* ★ 17/19 = *Co.* 163, l. 24 à 27 ★ 19 eandem

CONTACTS SPHÉRIQUES.

(Léçons des *Varia* : *Ia.*, pages 74 à 88.)

P. 52. 7 existit ★ 10 qua ★ 17 elementis = *Euclide*, XI, 2 ★ 18 pers | picuum (*Ia.*, 75) ★ 20 dat | dato ★ 21 eum

P. 53. 6 ACD | CAD ★ *Fig.*, 49. Le triangle NOM n'est pas figuré; le point N est marqué entre A et O. ★ 13 et 15 eum

P. 54. 11 MEON | NEOM ★ 14 igi | tur (*Ia.*, 76) ★ 18 eum

P. 55. 2 eum

P. 56. 5 eum ★ 12 Appollonio ★ 16 (*Ia.*, 77) ★ *Fig.*, 52 : ne vient qu'après la *fig.*, 51 et au bas de la page *Ia.*, 77.

P. 57. 10 incli | nationem (*Ia.*, 78)

P. 58. 4 eum ★ *Fig.*, 54. Les points I, H ne sont pas marqués. ★ 14 (*Ia.*, 79) ★ 19 ERCA | ERCH (*aussi* 20)

P. 59. 3 eum (*aussi* 4, 5, 14, 19) ★ 6 etiam perpend. ad

P. 60. 1 (*Ia.*, 80) ★ 7 et 10 eum

P. 61. 1 LEMMA I. *en vedette* ★ 3 ECA | ECB ★ elementis = *Euclide*, III, 36 ★ *Fig.*, 57. Des perpendiculaires AN, CM sont abaissées des points A, C sur l'axe BD. ★ 8 | converti (*Ia.*, 81) ★ 9 eum ★ 12 LEMMA II. *en vedette* ★ 16 O, L, E, D | OELD

P. 62. *Fig.*, 58. Des perpendiculaires ON, LI, EF, DB sont abaissées des points O, L, E, D sur l'axe AP. ★ 6 | LEMMA III *en vedette* (*Ia.*, 82)

P. 63. 7 sphaericam *semble superflu* ★ 15 eum (*aussi* 17, 31) ★ 26 LEMMA IV *en vedette* ★ 30 nam secetur sphaera ad planum ★ 32 | planum (*Ia.*, 83)

P. 64. 1 Habemus | habens ★ 7 LEMMA V *en vedette* ★ 9 plano | puncto ★ FGH | FHI ★ *Fig.*, 61. La lettre M n'est pas inscrite. ★ 13 B | BI ★ 16 superfl | ciem (*Ia.*, 84)

P. 65. 6 M | H ★ 8 IFH | DFH ★ 9 PFM (*les deux fois*) | PFH ★ 11 FM | FH ★ 22 exequemur ★ 30 HI per 2. pro | blema (*Ia.*, 85)

P. 66. 3 eum

P. 67. 8 ex 3. lemmate ★ 9 (*Ia.*, 86) ★ 14 fiet

P. 68. 5 VIII | octavum ★ 6 V | quinti ★ III | tertio ★ 8 (*Ia.*, 87) ★ 12 III | 3. ★ et om. ★ 17 Une figure, qui a été supprimée, représente un cercle inscrit dans un angle ABC et renfermant deux cercles D, E qui sont tangents intérieurement au premier.

P. 69. 1 (*Ia.*, 88) ★ 4 sexto | VI. ★ 8 Une figure représente quatre cercles A, B, C, D tangents intérieurement à un cinquième ★ 15 sphaericis | *lire* sphaericis (?)

SOLUTION DU PROBLÈME D'ÉTIENNE PASCAL.

P = Texte d'après Bossut, *Œuvres de Pascal*, 1779, Tome IV, pages 450 à 454.

F = Autographe de Fermat, Bibl. Nat. Imprimés, Réserve 848.
 $\begin{smallmatrix} V \\ 3 \end{smallmatrix}$

P. 70. 2 dño de Paschal F (P ajoute au titre : eodem autore Fermat). ★ 3 de Paschal F ★ hoc problema P , om. F (à supprimer) ★ Fig. 65. Les figures jointes à l'autographe ne sont pas de la main de Fermat; dans le texte, les lettres désignant les points sont en minuscule (sauf B et H) et surmontées d'un trait horizontal.

P. 71. 1 AF]fa F (aussi 2) ★ HF]fi F (aussi 3) ★ 9 cum F eum P ★ 12 IB]Bi F ★ 16 duplum]dimidium FP (peut-être faut-il lire utriusque dimidium triangulum) ★ 21 CO]oe F ★ 24 triangulo AFC]ajoutez avec F : isosceli

P. 72. 3 cum F ★ 4 recta F recta P ★ prima]6 P , om. F ★ 5 ED]de F ★ 6 igitur est ut rectangulum HIE ad F ★ 7 ad idem rectangulum AC F ★ 10 EH]le F ★ 18 non]nec F ★ 19 facillimè F ★ 20 secunda]2^a P septimà P ★ autem est en interligne et sed rayé avant triangulum F ★ Fig. 66. La droite FM est tracée sur la figure de Bossut. ★ 22 utrinque FP ★ et]licet F ★ 23 variabit]variet F

P. 73. 1 ibit]erit F ★ 2 de]ex F ★ 3 concludet F ★ 9 cum F eum P ★ 15 varians proportionem si P ★ 20 placet] F ajoute $\acute{\alpha}\rho\sigma\acute{\alpha}\lambda\omicron\varsigma$ ★ Domino (les deux fois)]dño de F ★ 22 Baliani P Galilaei F ★ 23 Dominus]dñs de F ★ 25 expectamus P ★ 29 ac differe[n]tia F

P. 74. 8 Baliani P Galilaei F ★ 11 cum F

DEUX PORISMES.

P = Texte de Bossut des *Œuvres de Pascal*, 1779, Tome IV, p. 449 à 450.

F = Autographe de Fermat, Bibl. Nat. Imprimés, Réserve 848.
 $\begin{smallmatrix} V \\ 3 \end{smallmatrix}$

Nota. — Les figures jointes à l'autographe sont de la main de Fermat et semblables à celles qu'a reproduites Bossut : au nombre de trois correspondant à notre fig. 67 et avec la légende : *Id porisma 1^{um}*; au nombre de deux pour notre fig. 68 avec la légende : *Id porisma 2^{um}* et avec la note : *circulos non adimpleximus, licet propositio tota circumferentia locum habeat*. (Dans la figure non reproduite pour le second porisme, les points V et O sont sur les prolongements du diamètre AC.) Les lettres des figures sont en minuscule, sauf A, B et H; dans le texte, elles sont surmontées d'un trait horizontal; au lieu de V, que nous avons adopté d'après l'usage des *Varia*, il faudrait partout lire U, comme a fait Bossut; au contraire, la lettre Y correspond à un v minuscule de Fermat.

P. 74. 13 *F* ne porte pas de titre général. P y ajoute autore Petro Fermat. ★ 14 1^{um} porisma F , PORISMA PRIMUM P ★ 15 ABE]ABd F ★ quarantur F

P. 75. 9 O]p *F* (par erreur) ★ 12 NH]ni *F* (par erreur) ★ 14 representabit *F* ★ AB in D]ABd *F* (supprimez donc sub après rectangulo) ★ 15 2^{um} porisma *F*. PORISMA secundum *P* ★ ABCD]ABep *F* (en désaccord avec la figure) ★ 22 quadrupla *FP*

P. 76. 1 *F* ajoute et avant sumptā. ★ 3 ND]UD *P* nd *F*

PORISMES D'EUCLIDE.

(Leçons des *Varia* = *Va*, pages 116 à 119.)

P. 76. 14. EUCLIDEORUM ★ 16 Pappus (voir éd. Hultsch, p. 636, l. 18 à 30) ★ 17 cum ★ 20 edax abolere vetustas (*hémistiche d'Ovide, Métam.* XV, 872) ★ 24 Willebrordus ★ 26 διχοστατεύς

P. 77. 3 4 Euclidæorum ★ 3 Pappus, p. 648, l. 19 à 20; traduction de Commandin, f. 160, l. 10 à 11 ★ 11/10 Virgile, *Enéide*, II, 589-590 ★ 13 sydus ★ 14 abscondamus ★ 16 dumtaxat ★ 17 quodocunque

P. 78. 4 (*Va*, 117) Videatur figura porismatis 1. est ajouté au-dessous de PORISMA PRIMUM (les figures de cet opuscule sont gravées sur les Planches à la fin du Volume des *Varia*). ★ Fig. 69. La même figure comporte trois positions du point V, entre N et O, entre O et E, et entre E et F; comparez la fig. 70 et le texte, p. 79, 6 à 11. ★ Ligne 4 de la Note. Bouillau a écrit Cavallerio.

P. 79. 3 Videatur figura porismatis 2. ajouté au-dessous; la même addition, sauf les chiffres respectifs 3., 4., 5., est faite avant les énoncés des porismes suivants, 79, 12; 80, 8; 81, 9. ★ 13/14 utenque

P. 80. 3 AO]AN ★ 8 (*Va*, 118) ★ Fig. 72. Une lettre O est inscrite au même point que la lettre H.

P. 81. 10 utenque ★ 11 juneta AZ fiat | peut-être juneta AZ fiat ★ 13 HN]HC ★ 20 Pappus, p. 650, l. 10 à 11.

P. 82. 4 HN]HC ★ EHN]EHC ★ 9 Pappus, p. 652, l. 2 ★ 14 Cum ★ 15 cum ★ 19 Pappus (*Va*, 119). Voir éd. Hultsch, p. 652, l. 3 à 4 ★ 20 quinti]5ⁱ ★ 21 RAC]RAB

P. 83. 3 quinti]5ⁱ ★ 6 Cum ★ ipsi]ipsa ★ 7/9 = Commandin, f. 160, l. 10 à 13. ★ 10 et 17 cum ★ 10/11 authorem ★ 12 Pappus, p. 648, l. 18 à 21 : πορισματά εστιν Εὐκλείδους πορίσματα. 7. 5. 5.

PROPOSITION SUR LA PARABOLE.

(Leçons des *Varia* = *Va*, pages 144 à 145.)

P. 84. 5 quatuor]4. ★ 6 urtique ★ 7 in 1. fig.

P. 85. 4 CM]CN ★ 12 ex 52. 1. Apoll. ★ 13 in 2. fig. ★ 14 quatuor]4. ★ 18 cum (aussi 20 et 23) ★ 20 dentur]detur ★ 23 In 2. casu ★ 24 In 3. fig.

P. 86. 1 quatuor]4. (aussi 16) ★ 9 et 13 cum ★ 12 per 16. 3. Apoll.

P. 87. 2 cum (aussi 3) ★ |autem (*Va*, 145) ★ 6 ex 29. 2. Apoll. ★ 11 M]N

LIEU A TROIS DROITES.

(Leçons de la copie ancienne, dans le manuscrit de la Nationale, fonds latin, nouv. acq. n° 2339, f° 15.)

P. 87. 21 *Sur la figure, les lettres désignant les points sont en minuscule; dans le texte, la minuscule domine avec des variations irrégulières.*

P. 88. 6 datur|dantur ★ 8 eum (*aussi* 17) ★ 9 aequales ★ 10 rectang^{um} ★ 13 sector|fertur

P. 89. 2 eum ★ eum ★ 3 propo^{ne} 3ⁱ Apoll. ★ 6 rectang^{um} (*aussi* 7) ★ 9 eum ★ 10 recta OX|recte ox ★ 11 reliqua|recta ★ 12 demonstra^{onem}

LIEUX PLANS ET SOLIDES.

(Texte établi d'après la copie ancienne dans le MS., fonds latin, nouv. acq. n° 2339 = *L*, f° 1 à 9, 12 à 14. Leçons des *Varia*; pages 1 à 11 = *Va*.)^{*}

P. 91. 4 septimi|7. *L Va*. ★ Appollonium ★ 9 ad locos generalis *L* ★ 12 curva infinita ★ 14 ignota|*Va*. *ajoute* (lincie recte reponendum) ★ 15 circularem ★ parabolem ★ 16 hyperbolem ★ ellipsim

P. 92. 4 possunt institui ★ 3 ad angulum datum *L* ★ 9|Recta (*Va*, 2) ★ *Fig.* 78. La droite IM, mentionnée dans le texte (93. 7) n'est tracée ni dans *L* ni dans *Va*. En regard de la figure de *Va*, est inscrit « DA ¹ BE » (l'accolade correspond au signe d'égalité). Enfin aucune des sources ne distingue entre les lettres algébriques et les lettres géométriques. ★ 22 Z^p = DA ★ acquetur|acqu. *L*. ¹ *Va*

P. 93. 2 Z^p ★ 6 ZI|EI *L* (*en marge* forsan ZI) ★ sed angulus ad Z datur ★ 10 adicietur *L* ★ 12/13 7. prop. lib. 1. Appollonii ★ 15 nos *om.* ★ 17 quodcumque *L* ★ recta *om.* ★ 19 efficietur ★ 21 Appollonianis ★ 23 acquatur *L*, *Va* *ajoute en marge* : AE ¹ Z^p ★ 24 hyperbolem ★ 25 quodlibet *L* quodvis *Va* ★ 26 rectang. ★ 27 Z plano *L*

P. 94. 1 eum *Va*, eum *L* (*aussi* 19, 20) ★ rectang. (*aussi* 9, 13) ★ *Fig.* 79. La courbe n'est pas tracée, *L Va*. ★ 4 aut E|vel E ★ adfecta *L* ★ 5|Ponatur (*Va*, 3) ★ 6 D^p *Va* (*aussi* 8, 14, 15), D planum *L* ★ aquari *L*, *acqu.* entre parenthèses *Va*, *qui a en redette* D^p = AE \propto RA + SE *sur trois lignes*. ★ 8 D plano *L* ★ 9 duob. laterib. ★ 11 rep^{er}antur|*Va* *ajoute* « Uno verbo AS (lisez A — S) acquetur O et R — E acquetur I; igitur OI \propto (à savoir =) D^p (ajoutez — RS), quod proponitur, et haec erit constructio : D^p (ajoutez — RS) acquetur AEB; rectang. (lisez rectangulum) igitur ACF erit O in *L*. » *Ce texte se rapporte une figure représentant deux axes rectangulaires asymptotes d'une branche d'hyperbole équilatère dont AC, AE sont des abscisses; CF, EB les ordonnées correspondantes.* ★ 17 parall. (2 fois) ★ Dans *L*, la lettre V est toujours un U minuscule. ★ 20 ZP|ZI *L* (*en marge* forsan ZP)

(*) Les leçons sans indication appartiennent seulement au texte des *Varia*. Dans *L*, les lettres algébriques et géométriques sont généralement en majuscule; il y a quelques exceptions irrégulières.

P. 95. 1 D² *I a* (aussi 3), D plano *L* ★ 2 hyperbolem ★ *Fig.* 80. La courbe n'est pas tracée, *I I a*, ★ 4 parall. ★ Rectang. ★ 7 *I a* a en marge sur 6 lignes confuses : $A^2 \propto E^2$ » « A^2 ad E^2 in ratione data » « $A^2 \div AE$ ad E^2 in ratioae » ★ 7 cum *I a*, cum *L* ★ Aq.] *I a* emploie constamment la notation A^2 ; de même E^2 pour *Eq.* etc. ★ 7/8 aequatur] aeq. ★ 11 quad. *E* ★ rectang. ★ adficiuntur *L* ★ 14 [Sit (*I a*, 4) ★ 21 quadratum *L* ★ *Fig.* 81. Dans *I a*, les *fig.* 81 et 82 sont confondues et les courbes ne sont pas tracées sur cette dernière; dans *L*, la *fig.* 82 n'offre qu'une droite de N à L.

P. 96. 4 adficiuntur *L* ★ 5 perquirere ★ 8 evadit ★ 10 *I a* a en marge : $A^2 \propto DE$ ★ 11 aeq. *I a*, aequetur *L* (corrigez) ★ 12 parabolem *I a*, qui ajoute : constituantur NZ et ZI ad quemeunque angulum Z ★ 13 circa] on voudrait auparavant : vertice N ★ 14 datae ★ 14, 15 parallelae ★ 15 NZ] NP *L* ★ parabolem ★ 17 IZ] IP *L* ★ NZ] NE *L*. Au lieu de cette ligne, *I a* donne : hoc est, si PI intelligatur esse A et NP intelligatur esse E.

P. 97. 3 *I a* a en marge : $E^2 \propto DA$ ★ 6 parallela *L I a* ★ 9 aeq. *I a*, qui a en marge : $B^2 - A^2 \propto DE$ » « $B^2 - DE \propto A^2$ » sur trois lignes. ★ 15 Les parenthèses n'existent pas, *I I a*. ★ *Fig.* 83. La courbe n'est pas tracée, *L I a*. ★ 20 aequatur NZ] aequabiter NE ★ quadrato *L* (aussi 21) ★ 22 rectum] dextrum ★]NZ (*V a*, 5) ★ 23 aeq. *I a*, aequetur *L*.

P. 98. 1 supr. ★ ab *E* et *I q. om.* ★ 4 *I a* a en marge : $B^2 - A^2 \propto E^2$. ★ *Fig.* 84. Le cercle n'est pas tracé; les lettres *A* et *E* ne sont pas inscrites, *L I a*; un point O est marqué à l'extrémité gauche de la droite MN. ★ 8 quodeunque *L* ★ 9 ZI] on voudrait ajouter : (sive *Eq.*) ★ 9, 10 quad. NM ★ 10 le signe \propto est omis. ★ quad. NZ ★ 15 D in A bis] D in A' *L*. 2D in A *I a* (chacune des sources conservant par la suite sa notation propre) ★ *I a* a en marge : $B^2 - 2DA - A^2 \propto R^2 + 2RE$. ★ 17 aeq. ★ 19 Ergo] *I a* ajoute : auferendo scilicet D², quod utrinque fuerat additum,

P. 99. 1 $E = R$ ★ 3 aeq. ★ 6 Appollonii ★ 8 Appollonio ★ 11 ellipsim *L I a* (aussi 15, 22); *I a* a en marge : $B^2 - A^2$ ad E^2 rati. ★ 12 MN] NM *L* ★ N] Z ★ 16 quad NZ ★ 22 commisceantur ★ 23 [Si (*I a*, 6) ★ 26 in ratione data *L* ★ *I a* a en marge : $A^2 + B^2$ ad E^2 ratio hyperbol. ★ 27 hyperbolem ★ 28/29 quad.

P. 100. 1 hyperbole ★ 2 toto] lisez tota ★ 2/3 unà cum RO quadrato *om.* ★ 4/5 unà cum quadrato NR *om.* ★ 6 rectang. ★ NR quad. *I a*, NR quad^m *L* ★ *Fig.* 85. Les lettres *A* et *E* ne sont pas marquées. Dans la figure de *L*, il n'y a de courbe tracée qu'à l'intérieur du rectangle. ★ *I a* a en marge : OI sit A, ON, seu ZI, sit E. ★ 7 NO q *L*, NO quadrat. *I a* ★ ZI quadr. ★ quadrat. OI ★ 9 NR quadratum *L* ★ 12 I] Z ★ hyperbolem ★ 13 aequationem ★ 14 adficiuntur *L* ★ 16 adfectionis *L* ★ 19 adficiantur *L* ★ 21 Aq. bis par exception *L* ★ aequatur *I a* ★ En marge de *I a* : $B^2 - 2A^2 \propto AE + 2$ (lisez $\propto E^2$)

P. 101. 1 utrinque *L* ★ 3 \div *Eq. om.* ★ 6 MN q. *L* ★ NZ quadrato *L* ★ 7 quad. abs. ★ 8, hae (*V a*, 7) ★ *Fig.* 86. Les lettres *A* et *E* ne sont pas marquées. ★ 11 parallela ★ 12 Cum *I a*, cum *L* ★ 13 tota] toti ★ 15 quad. MN — quad. NZ ★ 17 NZ] UZ *L* ^{NZ} ★ 19 NR] UR *L* ★ NO] RO

P. 102. 2 quad. NZ ★ 3 NR quadrati *L* (micar) ★ NO quad. ad quad. OV ★ 4 superioribus ★ 5 ellipsim *L I a* ★ 6 dissimili *L* ★ 13 propos. ★ 13/14 lib. 1. Appoll-

★ 18 quateunque *L* ★ 21 practicea *L*, praxim *Va* ★ 23 habean datam *L* ★ 24, 25 *E*. terminus *NZ*. *L Va* ★ 25 *Ici, L écrit bis en toutes lettres, après Aq. et Eq.*

P. 103. (*Va*, 8) ★ 1 perpend. ★ 2 datae ★ NM]ZM ★ 3 *L* avait d'abord écrit : ipsi OZ æqualis ZM, puis corrigé une première fois : ipsi ZM æqualis ZO ★ Fig. 87. Le point I se trouve marqué au pied d'une perpendiculaire abaissée de O sur VZ; RM se confond avec notre ligne MI; l'arc OM n'est pas tracé *Va*. Dans *L*, la figure, tout à fait incorrecte, comporte un cercle complet UOI, les droites UIZ, ZO, NM, RN et RM, cette dernière passant au-dessous de I. ★ 7, 14 *Cet aligné est omis dans L*. ★ 15 (*Va*, 9) ★ ISAGOGEM *La copie de L, pour l'Appendice, est d'une autre écriture que celle de l'Isagoge; elle a subi diverses corrections, de la main de Roberval (?) ; notamment parabolon a systématiquement été changé en parabolam, hyperbolon en hyperbolam, paraboles et hyperboles en parabolæ et hyperbolæ, parabole et hyperbole en parabola et hyperbola.*

P. 104. 5 secant] corrigé de interseecant *L* ★ 6 sectionis] corrigé de interseccionis *L* ★ 9 *A cubus ÷ B in A quadratum L, A³ ÷ B in A² Va, qui continue l'emploi des exposants.* ★ Z plano *L*, Z^p *Va (et de même ensuite)* ★ 13 cum *L Va* ★ 14 *A cubus ÷ B in A quad. L* ★ 17 parabolon (aussi, 25) ★ 23 hyperbolon ★ 26 synthesium ★ 28 adfectis *L* ★ 31 exempl. ★ quadratoquadraticis]quad. quad. *Va*, quadratoquadratorum *L* ★ 32 Aq.]A³ ★ B sol *L*, B³ *Va* ★ Zq.]Z pl. *L*, Z^p *Va* ★ Dppl. *L*, D^{pp} *Va*

P. 105. 2 Dppl. *L* (aussi 10, 12) ★ B sol. *L* (de même 12; au contraire 10, B solid.) ★ 2 *L* omet le second signe — ★ 4 Cum (et 9, cum) *L Va* ★ 8 parabolon (aussi 14, 18) ★ 10 le premier signe — est omis *L Va* ★ 12 Dans *Va*, la barre de division s'étend jusqu'au-dessous de æquabitur; dans *L*, la fraction est divisée en deux. ★ 14]et ad (*Va*, 10) ★ 16/17]emend. *L Va* ★ 19 hyperbolon ★ 22/23 proport. ★ 24 *A cubus L* ★ 25 Dans *L*, si est raturé et remplacé par posito nempe quod, de l'écriture de Roberval (?)

P. 106. 2 B in DE ★ 3 intersectionem]sectionem ★ 12 aq. ★ 13 tamquam ★ parabolon ★ 14 et AO applicatae ★ 15 parallela est bien dans *L*; les crochets sont donc à supprimer. ★ hæ ★ 16 secunda]2. ★ 19 rectang. OVZ

P. 107. 1 dabitur]datur *L* ★ 4 proportion. ★ 7 quadrat. quad. ★ 9 æquab. ★ 12 aq. (les deux fois)] et *L Va* ★ B]B² ★ 13 parabolon (de même 23) ★ 17 climacticae]lacune de 3^{em} dans *L*, om. *Va*; ce mot devrait être entre crochets. ★ 26 —]÷ ★ Z sol *L* ★ Dppl. *L* ★ 27]Ergo (*Va*, 11)

P. 108. 3 —]÷ ★ 7 — om. *L* ★ 7/8 æquale Bq. — Bq. in Aq. bis ÷]fiet Aq. ÷ Bq. — Bq. in Aq. bis æquale Bq. — Bq. in Aq. — *L*, æquale B³ — B² in A² æquale B³ — B² in A² ÷ *Va* ★ 8 Z sol. *L* ★ Dppl. *L* (aussi 16) ★ 10 Bq. bis]²B² — *Va* ★ 14 parabolon ★ 16 $\div \left[\frac{Zs. \text{ in } A}{Nq.} \right] + \frac{Z \text{ sol. in } A}{Nq.} \text{ in } A \text{ } L, \frac{-Z^s \text{ in } A}{N} Va$ ★ 19/20 quadratoquadrat. ★ 22 quad. quadratae ★ 25 cum *Va*, Cum *L* ★ adfectione *L* ★ 27 quadratoquadrata ★ 29 est curandum

P. 109. 4 Z sol. *L* (aussi 11, 17) ★ 7 Bq. in Aq. bis]²A² in B² (aussi 11 la 1^{re} fois) ★ 9 Bq. in Aq. bis]²B² in B² ★ 11 Z pl.]Z^p (de même 13, 18, 21) ★ 12 secunda]2. *A* ★ 13 verbi gratia] (*V. G*) ★ 17 Zs.]Z ★ 19 hyperbolon *Va* ★ 21 Z pl. *L* ★ 22 ÷] corrigé de plus *L* ★ 24 —] corrigé de minus *L* ★ 26 æquale *L*, æqu. *Va* ★ 28 aq.

P. 110. 1 utrinque *L* ★ bis] *L* prend la notation abrégée " ★ 2 Bq in Aq. bis (la 2^{de} fois)]²A² in B² ★ 7 parabolon ★ fiet istinc.

LIEUX EN SURFACE.

(Leçons du manuscrit Arbogast-Boucompagni, fol. 51 à 55.)

- P. 411. 2 *en renvoi, la note* : d'après une copie. ★ 5 $\frac{2\pi\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta}{\xi}$ ★ 13 [conicis (f° 51^{vo})
- P. 412. 2 *Les numéros des lemmes ne sont pas inscrits* ★ 12 erit | est ★ 13 [Si (f° 52)
- P. 413. 3 | sint (f° 52^{vo}) ★ parabola aut hyperbola ★ 13 Archimedaica ★ 21 circum | ferentiam (f° 53) ★ 27 NIP | NMP ★ 28 Cum
- P. 414. 3 | NIP (f° 53^{vo}) ★ 4 Cum (*aussi* 9, 13, 17, 19) ★ 19 dumtaxat ★ 20 | satisfaciat (f° 54)
- P. 415. 14 | locorum (f° 54^{vo}) ★ 15 dumtaxat ★ 18 *et* 26 cum
- P. 416. 1 | superficies (f° 55) ★ 16 quibuscunque ★ 20 | major (f° 55^{vo})
- P. 417. 8 mabis (?) ★ 14 jan. ★ *Au-dessous* Finis.

DISSERTATION TRIPARTIE.

(Leçons des *Varia*, pages 110 à 115.)

- P. 418. 12 executuros ★ 13 cum
- P. 419. 20 sive aequatio | nem (*Var.* 111)
- P. 420. 4 verbi gratia | v. g. ★ 2½ cubocubus ★ planosolidum ★ solidosolido ★ 26 quadratocubus ★ planoplanum ★ planosolido
- P. 421. 3 quadratocubocubus ★ planoplanosolidum ★ planosolidosolido ★ 5 quadratoquadratocubus ★ solidosolido ★ planoplanosolido ★ 7 cum (*de même* 11)
- P. 422. 3 parabolam ★ parabolæ *Var.* (*corriger* paraboles) ★ Fig. 90. Non reproduite dans les *Varia*. ★ 11 cum
- P. 423. 4 continent (*Var.* 112) ★ 13 cum ★ 21 3¹. ★ 4¹. 5¹. ★ 22 6¹. 7¹. ★ 8¹. 9¹. ★ 10¹. ★ 24 9¹. ★ 25 3¹. ★ 28 1¹.
- P. 424. 1 ex | ex una parte, ex ★ 8/9 quadrati | *lire peut-être* quadratici ★ 14 Z plan. in A quad. quad. ★ 15 D solid. ★ M plan. plan. in A quad. ★ 27 utrinque
- P. 425. 2 Z planum ★ 3 3¹. ★ 8 poste | riori (*Var.* 113) ★ 9 quadrati | *lire peut-être* quadratici ★ 9/10 quadraticum | quadratum ★ 12 prioris ★ 14 inter sol. N ★ 20 peracto | parto ★ 25 quadratum | latus quadrati ★ aequandum | aequandi. *Peut-être faut-il conserver ces deux leçons en supprimant les mots a latere* (25/26).
- P. 426. 2 4¹. (*aussi* 8) ★ 11 problematibus (*aussi* 14) ★ 13 homogenea ★ 18 hanc ★ forma ★ 23 Cum ★ 24 ad primam | pura ★ 26 cum ★ 27 quadrate ★ 33 8¹. ★ 7¹. ★ 4¹.
- P. 427. 1 10¹. ★ 9¹. ★ 5¹. ★ 12¹. ★ 2 11¹. ★ 6¹. ★ 3 Cum ★ 8¹. ★ 7¹. ★ 4 5¹. ★ 6¹. ★ 10¹. ★ 9¹. ★ 3 7¹. ★ 8¹. ★ 12¹. ★ 11¹. ★ 6 9¹. ★ 10¹. ★ 11 alienis | *Ou*

n'a pu retrouver à qui, en particulier, Fermat aurait emprunté cette formule d'une pensée qui a été exprimée de diverses manières soit sur Platon, soit sur Aristote.
★ 13 (*Fa*, 114) ★ 21 *expatiari*

P. 428. 1 5¹ (*aussi* 21, 23, 29) ★ 2 6¹ ★ 4¹ (*aussi* 22, 30, 33) ★ 4 3¹ (*aussi* 8, 11, 13, 28, 29) ★ 7/8 *manebit D aequatio* ★ 17 *Cartesius solvi tantum* ★ 11¹ ★ 12¹ ★ 19/20 7¹

P. 429. 2 4¹ (*aussi* 3, 28) ★ 4 *triginta*] *trigesima* ★ 5 7¹ (*aussi* 8/9) ★ 6 6¹ (*aussi* 10) ★ 7 A³ et B³ D ★ 11 9¹ ★ 14 *cum* ★ 16 [*immutandam* (*Fa*, 115) ★ 21 *verb. grat.*

P. 430. 1 3¹ (*aussi* 2, 24, 31) ★ *decem*] 10. ★ 2 4¹ ★ 3 *executi* ★ 6 *cum* (*aussi* 23) ★ 12 *duodecim*] 12. ★ 20 *octo*] 8 (*aussi* 27) ★ 29 *quatuordecim*] 14. ★ 31 5¹.

P. 431. 1 *Cum* ★ 11 *D om.* ★ 13 17¹ ★ 14 257 ★ 19/20 *expecto*

MAXIMA ET MINIMA.

1. — *L* = copie ancienne fonds Libri (nouv. acq. lat. 2339), f^o 10^r 11.

Fa = *Varia*, pages 63 à 64.

*A*₁ = copie d'Arbogast (nouv. acq. fr. 3080, f^o 143 à 145).

De la page 133, ligne 7. $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \text{copie au net d'Arbogast (manuscrit} \\ \text{Boncompagni)} \end{array} \right\}$ pour la seconde rédaction
à la page 134, ligne 7. $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}' = \text{brunillon d'Arbogast (nouv. acq. fr.} \\ \text{3080) en tant qu'il diffère de } \mathcal{A} \end{array} \right\}$ (voir page 133, note 1).

Cf. *D* = Lettres de Descartes, éd. Cleselier, III, 56 et 57

P. 433. *Au-dessus du titre* : Copie d'un écrit envoyé par le R. Pere Mercenne a] monsieur *en rature*] des Cartes *L* : Ex Fermatio *A*₁ ★ 6 in notis] ignotis *Fa L A*₁, *leçon qu'il fallait peut-être conserver* : ep. page 186, 28 et 30, où toutefois le sens est différent; pour la leçon proposée, voir p. 440, 7 ★ 10 prius esse terminus *Fa A*₁ ★ 11/12 gradibus *om.* *A' aj. A* ★ 15 adficiuntur *L A*.

P. 434. 1 adfectione *L A* ★ deinde] dehinc *A* ★ utrinque *L* ★ 4 adfirmatis *L Fa A* ★ 7 subiectimus *A*₁ ★ 8 rectang. *Fa A*₁ (*aussi* 12) ★ 9 pars] par *Fa* ★ ipsius *om.* *Fa A* ★ 10 Aq.] A² *Fa A*₁ (*qui conservent ensuite la notation exponentielle*) ★ 13 — A in E bis] ²E in A *Fa*, — ²E in A *A*₁ ★ Eq.] E *Fa* ★ 14 rectang. *Fa* ★ 15 *A*₁ ajoute :

$$B \times A - A^2 + B \times E - 2A \times E - E^2 = B \times A - A^2$$

17 E bis] Eⁿ *Fa* ★ *Au lieu de cette ligne, A*₁ écrit : erit $B \times E = 2A \times E + E^2$ ★ 19 et 21 A bis] ²A *Fa* ★ *A*₁ écrit pour la ligne 19 : erit $B = 2A + E$, pour la ligne 21 : erit $B = 2A$.

P. 435. [(*Fa*, 64) ★ 4 punctum] *Of aj. Fa*, *O aj. A*₁ et (*en interligue*) *L* : *peut-être faut-il ajouter* ut O ★ 9 quad. (4 fois) *Fa A*₁ ★ 11 quam CE quad. ad 1E quad. *A* ★ quad. 1E *Fa* ★ 12 Cum *L Fa A*₁ ★ 13 D] *L a B et en marge* : il a icy nommé B ce qu'il nomme d par apres ★ 16 ad] aut *Fa* ★ proportionem *DL*, rationem *Fa A*₁ ★ 17 bis *om.* *A*₁ *Fa* (*de même* 19, 22 et p. 436, 2, 4, 8); *L a partout la notation Eⁿ* ★ 19 Aq. (*la seconde fois*) A quad. *L* ★ 21 *A*₁ ajoute : $D \times A^2$ erit

P. 136. 6 A bis]A² *I a.* ★ 13 proportionibus]proportione *I a* ★ 16 Domino]Dño *L*
★ *I porte en marge dans le sens vertical* : M^r des Cartes, f. 347.

II. — Leçons des *Varia*, pages 65 à 66 (où la notation exponentielle a été adoptée).

P. 137. 9 parabola ★ 12 basis

P. 138. 1 *lom.* ★ pet. 9 ★ 2 Archimed. de acquipond. cum ★ 3 eavas ★ 5 cum
(aussi 19) ★ 7 Archimedao ★ 9 E bis]E'' (notation qui continue ensuite) ★ 12 ad
Eq. — Eq. — om. ★ 16 ut B in E² — ad B² + E² + E²EB in E'' ita ★ 17 aequalitur]appli-
cabitur ★ 18 $\frac{B^2 \text{ in } A \text{ in } E'' + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A \text{ in } E^2}{B^2 \text{ in } E'' - B \text{ in } E^2 B}$ ★ 20 recta] (*I a.*, 66)

P. 139. 2 *Eq. bis*]2E² ★ 4 bis]*La notation est désormais le coefficient en exposant à l'avant.* ★ —] — ★ 6 *Le second terme est + E³* ★ 8 ab *E.* adfecta ★ 19/20 indicare]ju-
dicare ★ 21 5]51.

III. — Leçons des *Varia*, pages 66 à 69 (où la notation exponentielle a été adoptée).

P. 140. 7 Algebricis ★ 8 Ac.]A ★ 10 quad. ★ 11 ex BEA ★ 12 E bis]2E (même
notation ensuite pour les coefficients) ★ 13 — *Ec. om* ★ 14 primò ★ 16 tamquam
★ 20 B² in A — A³ ★ 22 *le troisième terme est : — A² in 3E²*

P. 141. 3 *Eq.]E* ★ 14 oportet]aequationes *aj.* ★ 17 aequale ★ 24 linea C

P. 142. (*I a.*, 67) ★ 2 reffert ★ 4 utut ★ 11 proportionem]quaestionem ★ 20 erit
om.

P. 143. 1 MN erit ★ 4 B in A]B ★ 22 *Le troisième terme est répété.*

P. 144. 7 residuum (corrigez) ★ 20 punct. N ★ 23 OMD]OND ★ 26]Ut (*I a.*, 68)

P. 145. 2 Ellipsim (aussi 7, 9, 10) ★ 3 Algebricis ★ 5 contentam]inter punctum V
sumptum ad libitum, *ajouté* ★ 9 DM]DN ★ 12 quad. EO ad quad. IV ★ 14 quad.
(*3 fois*) ★ 16 rectang. (*3 fois*) ★ 18 quad. (*3 fois*) ★ 20 rectang. (*3 fois*) ★ 21 quad.
(*3 fois*) ★ 23 et 24 rectang. ★ 25 et 26 quad. ★ 26 erit *om.*

P. 146. 16 homog. ★ 17 in G *om.* ★ 21 eam]dem (*I a.*, 69) ★ 25 OM]ON

P. 147. 2 nunquam ★ 5 asymptoton ★ 6 Domino]D.

IV. — Leçons d'Arbogast.

I = copie au net (MS. Boncompagni, f^{os} 78 à 81).

*I*₁ = brouillon (nouv. acq. franç., n^o 3280, f^{os} 133 à 136).

*I*₂ = leçons de *A*₁ écrites après coup d'une autre encre en corrections ou dans des lacunes
primitivement laissées.

P. 147. 3 *Tître d'après I qui a en note* : D'après la copie de Mersenne, *A*₁ a pour
titre Méthode de maxima et minima de Fermat *et en marge*. D'après une copie écrite par
Mersenne et peu lisible ★ 9 syncriscos] *en renvoi* Viet. pag. 104 *I*₁ ★ anastrophes] *en*
renvoi Viet. pag. 155 *I*₁ ★ 10 correlatarum *om.* *I*₁ ★ 10/11 constitutione *I*₂. construc-

tionem A_1 ★ 13/14 quæ veteri et novæ molestiam exhibuere Geometriae A_2 ★ 16 licet]sed A_1
licet
sed A

A. 148. 1 $\mu\alpha\alpha\chi\lambda\acute{o}\varsigma$]monachos ★ 2 constitutivi A_2 ★ 3 utrinque ★ 5 secta]lire plutôt
secunda ★ 10 eâ conditione A_2 , ita quidem A_1 ★ 11 supponitur A_2 , endum *ecrit au-*
dessus de la finale de supponitur A ★ 13 interceptiuntur A_2 ★ 14 alicujus A_2 ★
17 igitur A_2 ★ correllata A ★ 24 loco A_2 ★ 26 accedunt A ★ 27 semperque auctis A_2
★ 28 differentia *corr. de* distantia A_1 distantia A_1

P. 149. 1 ultimam A_2 ★ divisionem A_2 ★ 1;2 $\mu\alpha\alpha\chi\lambda\acute{o}\varsigma$ vel] *en lacune* A_1 , ut A
★ 2 unica A_2 ★ contingit A_1 ★ quum A , cum ou tum (?) A_1 ★ quantitates *om.* A_1
★ 4 Cum A_1 , ★ igitur (*corr. de* jam) A_2 ★ correllatis A_2 ★ 5 methodum Vietæam A_2
★ acquetur ipsi A_2 ★ 6 semper A_2 ★ 14 quadr. ★ 15 correllata A ★ 16 quadr. A
★ 17 Comparantur A_1 ★ 18 quadr. (*2 fois*) ★ cubo (*2 fois*) ★ 20 A quadr. A ★ Equadr.
★ 21 constitutio A , *en lacune* A_1 ★ 23 quadr. A

P. 150. 1 practice A , praxis A_1 ★ correllatarum A_1 ★ 2 per ipsorum differentiam
comparari]sen ipsorum differentias (*corr. de* distantias) comparari A , seu ipsorum (*corr.*
de summa) distantias parari A_1 *en renvoi au bas de la page*; A_2 *a corrigé le dernier*
mot en comparari ★ ut eâ ratione A_2 , ut...ratione *corr. de* constitutione A_1 ★ 3 unicâ
corr. de misere (?) A_1 ★ differentiam *corr. de* distantiam A , distantiam A_1 ★ 5 Ac.]A
cub. (*même abrég.* 7, 10, 12, 16) ★ 7 B quadr. A_1 ★ 11 una]prima A_1 ★ 24 Cum A_1
★ inventa A_2 ★ 24 25 constitutione A_2

P. 151. 3 libro]l. ★ 4 L. 7 A_1 lib. 7 A ★ 11 —] — A_1 (*même faute poursuivie dans*
le calcul 13, 17, 20, 23 et p. 152, 10, 16) ★ 18 parte *om.* A_1 ★ 21 communibus A_2 ,
equalibus A_1

P. 152. 6 D in A in Eq.]D in A — Eq. A_1 ★ 8 hujusmodi *corr. de* has div. A_2 ★ 14 con-
stitutione]constr. A_2 ★ 15 igitur *corr. de* sive A sive A_1 ★ 20 quippe se vel A_2 ★ 21 non
deerit A_2 ★ 24 crebras A_2 ★ 25 Recurrendum A_2 ★ posteriorem *corr. de* positiones A_2
★ 26 tamen licet A_2 ★ 26/27 facilitatem A ★ 27 abunde *om.* A_1 ★ 29 id genus A_2

P. 153. 1 pronunciamus ★ semper et A_2 ★ 2 autem A_2 ★ 3 contineri A_2 ★ 8 *Tout*
le vers est de A_2 ★ 10 tribus]3 ★ reperire *corr. de* invenire A_2 ★ si ducantur tres
corr. de ducantur duæ et tres A_2 (*en sorte qu'il reste* si ducantur tres duæ et tres)

V. — Leçons de la copie d'Arbogast (MS. Boncompagni, f^{rs} 56 à 51).

P. 153. 14 asymetriae ★ 22 *pas de parenthèses* (non plus que p. 154, 2, 8, 10, 20,
p. 155, 10, 14, 16; p. 156, 4) ★ quadr. (*même abreviation ensuite*)

P. 154. 17 O quadrato ★ 18 Cum ★ 21 asymetria

P. 155. 10 quadrati ★ 11 Cum ★ 14 et 16 lateri ★ 16 dm. B

P. 156. 8 O plan. ★ 11 resolvitur ★ 17 Bq. — A quadr. ★ 18 AB quadr. (*2 fois*)
★ AD quadr. ★ 21 ad quæ]quæ ad ★ A quadr.

P. 157. 4 Aq. quadr. ★ 5 minima]maxima ★ 7 Aq. quadr. ★ 8 maxima]minima
★ 10 B cubus ★ 12 B quadrato ★ 16 asymetrias ★ 26 hyperbola ★ 27 hyperbola

★ 29 a P. 153. 1 casymptotis AF, EG) *explication de sub angulo AFC, n'est peut-être pas de Fermat.*

P. 158. 4 hyperbolam ★ 5 hyperbolâ ★ 9 MB]in B ★ 12 minoris|nimis

VI. D'après l'original de Fermat.

F = manuscrit original (nouv. acq. fr., n° 3280, frs 113 à 117).

Fa = *Varia*, pages 69 à 75.

F = copie d'Arbogast (MS. Boncompagni, frs 68 à 73). *F* et *A* ne portent point de titre : *Fa* en note : (D'après une copie. Cet opuscule est imprimé dans les *Opera Varia* de Fermat, Tolosa, 1679).

Dans le manuscrit original *F*, les lettres des figures et celles qui, dans le texte, en désignent les points, sont en minuscule, sauf A, B et H, et surmontées d'un trait horizontal : les lettres algbriques sont au contraire en majuscule.)

P. 159. 2 Praef. *Fa* ★ VII]7^e *F*, 7, *Fa* ★ 4 suas *corr. de ipsarum F* ★ 3 lineas rectas tantum *Fa* ★ 8 tamen *om.* *F* ★ legitimum *om.* *F*, sulliciens *Fa A* ★ 14 adaequalitatem|aequalitatem *Fa* ★ 20 [Esto (*Fa*, 70) ★ se]tis *Fa*

P. 160. 1 Cum *Fa F* ★ 12 et 17 *pas de parenthèses; Fa suit la notation exponentielle.* ★ 13 Cum *F F*, Cum *Fa* ★ Fig. 101. La ligne AU n'est pas tracée dans *Fa*.

P. 161. 2 E bis]E *Fa* (même notation ensuite) ★ 3 *Fa* omet — N in E bis et supprime désormais in dans les monômes. ★ 4 Aquadratum|A² *Fa* ★ 10 CA|A *Fa* ★ U]pour cette lettre, *Fa* et *F* ont toujours V. ★ AC|rectae *aj.* *Fa* ★ 11 latitudine *A* ★ juncta recta EH *Fa* ★ 13 et 15 Nicomedaea *F F Fa* ★ 14 prolixior|proclivior *F F Fa* ★ 16 |Polus (*Fa*, 71) ★ 17 curva *Fa* ★ 18 est *om.* *F* ★ NBA|BA *F F Fa*

P. 162. 3 BI|BG *Fa* ★ 6 procedat|prodeat *Fa* ★ 7 recta (devant CD et EH) *om.* *Fa* ★ vocetur (après CD et EH)|sit *Fa* ★ EH|EX (peu lisible dans *F*) *F Fa* ★ 12 iis|his *Fa* ★ 14 Dominus|Dnaus *F, D.* *Fa* ★ 22 aequalitas *F F Fa* ★ 23 curva|Cycloide *aj.* *Fa* ★ Domini|Dni *F, Dni* *F, D.* *Fa* ★ 24 H corrigé de A dans *F* (2^e main) ★ CF|EF *Fa* ★ 26 est dicenda *Fa* ★ 29 CM|AM *Fa*

P. 163. 7|RD vocetur Z (data *om.*) *Fa* (p. 72) ★ 8 vocetur|sit *Fa* (aussi 9) ★ 9 ut-cunque *F F* ★ 13 NUOE|nioue *F*, NOVE *Fa* ★ 14 et 17 adaequari|aequari *Fa* ★ 16 et 17 minus]— *Fa* ★ 18 tres *om.* *F Fa* ★ 19 ex|et *F* ★ superiore *Fa*

P. 164. 6 triangulorum similitudinem *Fa* ★ 7 ipsi *om.* *Fa* ★ 8/9 aequalitas *Fa* ★ 11 in B|in in B *F* ★ consistet adaequalitas inter *om.* *Fa* ★ 12 et R in B in A|} RBE *Fa* ★ 13 Cum *F F Fa* ★ 14 aspetur|} *Fa* ★ 16 ex una parte aequatur|} *Fa* ★ ex altera *om.* *Fa* ★ 18 nempe ZBE cum *Fa* ★ 20 .Equetur *om.* *Fa* ★ 21 cum|} *Fa* ★ 22 fiet igitur|et fiet *Fa* ★ 24 Constructio|Const. (écrit au-dessus de Ad) *F, om.* *Fa*

P. 165. 3 ideo|*corr. de igitur F* ★ 4 BD|DB *Fa* ★ 5 sive et elegantior evadet *F* ★ 9 vero *om.* *F* ★ 11|Sit (*Fa*, 73) ★ 14/15 La correction indiquée dans la note 3 peut être réellement de la main de Fermat; le texte primitif, remplacé par les mots : fiat... ad rectam NO, semble avoir été, autant qu'on peut le discerner sous la rature : portioni quadrantis MD rectam NO constituimus aequalem. En fait, c'est la projection de 10 sur la perpendiculaire au rayon MH qui doit être égale à l'arc MD.

P. 166. 1 Nicomedaea *F F Fa* ★ 2 Domini|Dni *F* ★ 3 pertinent *F* (à corriger)

★ 8 in sequenti figura *om.* FI ★ 9 applicato I ★ 19 cum FI Ia ★ fornari|formarii Ia

P. 167. 2 necumque FI ★ 3 statione|ratione Ia ★ 8/9 Domino de Roberval *om.* Ia
Duo de Roberval I .

VII. — Texte d'après le MS. Vieq-d'Azyr-Boncompagni, P^o 17^{mo}-18^o = B .

A = copie d'Arbogast (MS. Boncompagni, P^o 18-19).

H = Nationale, fonds latin 11197, P^o 17-18.

Titre seulement dans H avec l'abréviation AD R. P. M.

P. 167. 20 semicirculo H ★ 21 et|plus HH ★ Après cylindri, H ajoute : (Similis est rectangulo DEA plus dimidio quadrati ex DE et omnibus duplatis), avec la note marginale : Quod inclusum est hoc addidi ad explicationem.

P. 168. 3 aequatur|aequale H (aussi I) ★ 6 adplicatis H ★ 9 satisficit H ★ 13 Cum IBH (aussi 23) ★ 18 autem *om.* HH

P. 169. 1 ut majus|majus ut H ★ 2 sectae|divisae H ★ minus|Vide in alterâ paginâ *aq.* H ★ 7 determination |demonstratione H ★ 8 questioni|proposito I ★ quandoque|quandoquidem H ★ 10 Cum IBH ★ 12 quaestionem|propositum H

VIII et IX. = G = copie d'après Cleschier (noy. acq. fr., n^o 3280, P^o 87 suiv. et 78 suiv.).

D = Lettres de Descartes, éd. Cleschier, III, 51. Dans ces deux sources, pour le moins en VIII, la notation cartésienne a été complètement adoptée (exposants simple juxtaposition des lettres dans chaque monôme, coefficient numérique en avant du terme), mais avec des lettres majuscules.

P. 170. 3 AFDB|ADFB C , ADB D ★ 8 et 13 cum ★ 12 rectam *om.* D

P. 172. 1 et 3 10 C , 01 D ★ 4 et 6 latus quad.|radix quadrata ★ 4 La parenthèse n'est pas fermée D ; pas de parenthèses C . ★ 6 Pas de parenthèses. ★ 10 licet ★ 13 abruptis|et ruptis ★ 22 vergit D ★ 24 invento et theoremati C

P. 173. 8 huius *om.* C ★ 12 $\hat{\alpha}\pi\alpha\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ D

P. 174. 3 duo illa D ★ 6 Cum (aussi 21) ★ 9 ad rationem temporis motus ★ 20 ut summa|corr. de ut summam C , ut summam D

P. 175. 12 in medio denso C , in superficie medii densi D ★ 15 pure D , pure C ★ 16 C place ici la fig. 109 avec les mots : In figura avant Esto. ★ 25 C a en marge : in 1^{re} fig.

P. 176. 4 minor est D ★ NV|NR C ★ 5 cum (aussi 7, 14, 20) ★ 11 rectangulo *om.* C ★ 12 MN|NM C ★ 13 quadratum D , quadratoquadratum C ★ 30 et *om.* D

P. 177. 5 cum ★ 7 ut *om.* C ★ 11 NS|SN C ★ 14/15 rectangulo RNV bis (peut-être mieux; aussi 17/18) C ★ 21 C a en marge : V. in 2^{de} fig.

P. 178. 5 aequatur ★ 11 IN| C ajoute ita et omitt les lignes 12 et 13 ★ 13 IN D ★ 24 NR|M C

METHODE D'ELIMINATION.

Va = Varia Opera, pages 58 à 61.

P = MS. Nationale, fonds latin 11196, f^o 46 à 53.

L = MS., nouv. acq. latin 9319, f^o 17 à 20.

(Cette dernière copie emploie constamment la notation cartésienne complète, à partir de la page 181, ligne 15.)

P. 181. 4 *Va* ajoute : A Domino de Fermat ad Dominum de Careavi die 20^a Aprilis anno 1650 missus ★ 5 Reductio *L* ★ 6 Algebraicis ★ 12 Eq. ★ N qdto *L* ★ 14 quaecunque *L* ★ 15 et 19 cum ★ 16 Z sol. *Va* *P*, Z^o *L* ★ 18 Z, S *Va*, Z sol *P*; (de même ensuite) ★ 23 abs E *L* ★ ab secunda *Va* *L*.

P. 182. 1 hujusmodi *P* ★ 3 Cum ★ 4 tanquam et *L* ★ 8 *Va* marque + devant le premier terme. ★ 10 toties om. *L* ★ 11 omnino]continuo *L* ★ 16 affici *Va* *P* ★ 17 abs E *Va* ★ E qdum *L* ★ 22 ut *L*, et *Va* *P* ★ quomodocunque *L* ★ affecta ★ 23] Erit (*Va*, 59) ★ 27 ut diximus om. *L*.

P. 183. 3 Cum (de même 17, 22) ★ 6 tanquam *Va* *P*, ut tanquam *L* ★ 8 *P* a désormais l'abréviation Zs. ★ 9 Nq. in B]Nq. — in B, *Va* ★ 14 in A — in E *Va* ★ 23 Pour le troisième terme du dénominateur, *L*, a : — BAN².

P. 184. 3 cum ★ secundum *L* ★ 12 et cart. *P* ★ 13 (*Va*, 60) ★ 15 Algebraicis ★ symetrica *PL* ★ climatismus *Va* *L* ★ 15/16 Viætea *P* ★ 17 sufficiens]superficiens *L* ★ est om. *L* ★ 19 latus cubicum (B in A qu. — A cub.) *Va* *P* ★ *L*, a latus cubicum, latus quadratum ★ Z], *Va* (de même ensuite) ★ 20 latus (2 fois) *Va* *P* ★ latus quadratoquadratum *L* ★ latus quadratum *L* ★ D cub. *Va* ★ A qu. qu. *Va* *P*.

P. 185. 7 A qu. *Va* *P* (de même E qu. 20, B qu. 22) ★ A cub. (la 1^{re} fois) *Va* *P* (de même 10, 14, 28; aussi E cub. 28) ★ — Ac, om. *L* ★ — lat.] — L, *Va* *L* ★ 13 hæc enim una *L* ★ 20 D cubus *Va* *P* (de même E cubus 22, A cubo 22) ★] 21 sed et ex *L* ★ 24, 25 conjiciendi *P* ★ 28 B² *Va* ★ 29 radice *Va*.

P. 186. 4 inutilia]mutila *L* ★ 6 tertius, quartus *L* ★ et cart. *P* ★ 7 tanquam se]eundem (*Va*, 61) ★ 10 fuerint *Va* ★ reducta fuerint *L* ★ reducees om. *L* ★ 11 denique]deinde *L* ★ 13 exulare ★ 14 innumerosa *Va* ★ 15 resolutione, ... asymmetrie om. *L* ★ enim om. *P* ★ 18 cum ★ 19 quandiu *Va* *L* ★ 26 constituendum *L* ★ 28 nunquam *L* *Va*.

P. 187. 1 duntaxat *Va* *L* ★ 3 et cart. *P* ★ 5 data om. *P* ★ 13 exposcit]exposuit *L* 14 eaque]neque *P* ★ 19 B qu. *Va* *P* (de même 23) ★ Z qu. *P* 2 qu. *Va* ★ 20 cum ★ 21 deficientes *P* ★ 23 A qq. *Va* *P*. ★ 24 ex]de *L*.

P. 188. 1 Patchi]corrige de Ita erit *P* ★ 3 cubice, quadratoquadraticæ om. *Va* ★ et cart. *P* (de même 20) ★ ejus]ejus *L* ★ 12 inveniunt, ... solidum (13) om. *L* ★ 13 cum ★ 14 sumatur *L* ★ 17 quaecunque *L*.

PROBLÈME D'ADRIEN ROMAIN.

Leçons de l'original (Ms. Huygens 3o de l'Université de Leyde) : collation de M. Bierens de Haan.

La distinction des u et v, i et j n'existe pas dans l'original.

P. 189. 7 cepi ★ 190. 12 quintisectionem ★ 192. 3 + (pour et?) radici cubica
★ 13 + radici quadratorubica ★ 22 + radici quadratoquadratoebica ★ 194. 2 pri-
mogéniam ★ 5 *Adresse* : pour Monsieur
Huggens.

QUESTIONS DE CAVALIERI.

Leçons de A = MS. Arlogast Boncompagni, fol. 55 à 96.

B = MS. Vieq-d'Azyr-Boncompagni, fol. 18.

P. 195. 4 primi *A* ★ 5 D^o *A* duo *B* ★ 6 D^m *A* duum *B* ★ 8 felicissimum *B*

P. 196. 2 feliciter *B* ★ 6 cum *B* (aussi 23) ★ 8 pronunciamus ★ 14/15 *A* intervertit
les deux membres de la phrase. ★ 16 summam ★ 20 v. g. *B*

P. 197. 3 nemp[ite]me *A* ★ 4 cum *B* ★ 7 parabolam (aussi 8) ★ 14 aplicatis
(2 fois) *B* ★ 27 ambiens *AB* et *Mercurius* (voir p. 195, note 1) ★ 29 Domino] D^o *A*, D. *B*
★ exequemur.

P. 198. 1 parabolam ★ 2 proprietates ★ 3 impossibile] *A* a écrit ensuite, puis rayé,
verum est ★ 4 ellipses *B*

PROPOSITIONS A LALOUVÈRE.

Leçons de Lalouvière (*de C cloïde*, pages 391 à 397).

Les lettres des figures sur celles-ci et dans le texte sont minuscules. Les renvois aux
figures sont faits dans le texte, les figures 112 à 119 de notre édition étant d'ailleurs
numérotées 105 à 112 par Lalouvière.

P. 199. 5 hyperbola ★ 6 parabolæ (aussi 205. 10/11, 206. 22, 207. 9, 209. 15)
★ 6 hyperbole (aussi 200. 7, 15) ★ 202. 6/7 v. g. ★ 203. 5 quarta]107. ★ 8 quinta]108.
★ 11 quarta]108. ★ 204. 5 quinta]109. ★ 8 AM]em ★ 18 sexta]110. ★ 20 tertia]107.
★ 21 hæ]hoc ★ 22 eundem ★ 205. 2 AC]de ★ 14 AN]au ★ 15 AB]ub ★ RU]zu
★ 18 *Le numéro VI est reporté* 206. 1 ★ 206. 1 sexta]110 ★ 4 parabolæ (aussi 7,
207. 20, 208. 4, 24, 28, 209. 4) ★ 206. 12 septima]111. ★ 207. 4 enjuseunque
★ 14 acquetur ★ 19 quocunque ★ 208. 12 acquetur ★ 26 trienbus ★ 209. 14 dimi-
nuta.

DISSERTATION M. P. E. A. S

(Locus des *Varia*, pages 89 à 109.)

P. 211. 3 *La porte en marge* : Hæc Dissertatio typis edita fuit anno 1660. occulto Auctoris nomine.

P. 212. 4 cum ★ 13 L|PRIMA. ★ 15 cava|curva ★ 19 portio|nem (*Var.* 90)

P. 213. 1 cum ★ 3 basem ★ 4 BI|KI ★ 7 quam recta ab H ad R ducta|quam rectam ab HR ad R ductam ★ 10 eandem

P. 214. 3 Demonstrationem (*corrigez*) ★ 10|Exponatur (*Var.* 91) ★ secunda|2. ★ 11 AG|AF ★ quodlibet ★ 20 tertia|3. (*en marge* : Deest hoc loco figura 3. quam ad calcem libri lector inveniet.) ★ 21 eundem

P. 215. 9 cum (*de même* 11, 13) ★ 10 utrinque ★ basis (*cassé* 16, 26 *deux fois*) ★ 12 3. et 3. Figure (*de même* 18, 20, 21, 22, 24, 25, 2. *pour* secunda ou secundæ, 3. *pour* tertia, æ, au) ★ 23 æquales ★ 26 æquales (*Var.* 92)

P. 216. 2 secunda|2. ★ 3 basis (*cassé* 10) ★ ipsius|ipsi ★ 6 cum (*de même* 16, 22) ★ 14 basi

P. 217. 5 quarta|4. ★ 14 parabola

P. 218. 24 aut (*Var.* 93) ★ 26 rectorum|rectæ ★ 29 IF|IE

P. 219. 12 quinta|5. ★ parabola ★ Fig. 19|. *Les lettres 3 et 6 sont en majuscule grecque.*

P. 220. 3 directu ★ recta ★ 13 KI|IK ★ 19 et sit|et fit ★ parabola ★ 21 parabola (*cassé* 28) ★ 22 FX|EX ★ 26|sed (*Var.* 94) ★ 27 IK in KL|IK in KLS ★ 30 cum ★ 32 A|U (*de même dans la page 221, mais non plus loin*)

P. 221. 9 cum

P. 222. 1 parabolam ★ 12 *Les lettres grecques 3, 6 et plus loin 4, 9, 1, 2 de la figure 19 et du texte sont en majuscule : dans l'édition anonyme, toutes les lettres romaines ou grecques, sont en minuscule.* ★ 17 possit ★ 25 cum ★ 26 minori ★ eandem

P. 223. 9 parabola ★ |perpendiculares (*Var.* 95) ★ 16 4E|ΘE

P. 224. 9 minor|minorum ★ 12 cum

P. 225. 1 cum (*de même* 12, 18 et cum 23) ★ 6 parabolam (*cassé* 24) ★ 17|æquale (*Var.* 96) ★ 26 parabolas (*cassé* 27)

P. 226. 3 parabolas ★ 5 reliqua ★ rectæ ★ 6 æqualis seu applicatæ semibasi ★ 17 ad (*Var.* 97)

P. 227. 6 septima|7. ★ 8 BM, NL, EK, HI ★ 9 hæc|ajoutez priore ★ 16 quarta, a|4. a

P. 228. 5 cum ★ 15 (*Var.* 98) ★ 16 in Fig. 8.

P. 229. 11 recta|curva ★ 27 cum ★ RC|RE

P. 230. 3 autem (*Var.* 99) ★ 27 PQ|QP

P. 231. 1 in 9. Fig. ★ 3 AC|AG

P. 232. 6 eum enim cetera latera ★ 8 [FI (Ia, 100) ★ 26 in 3. v. g. ★ quod (corriges)

P. 233. 9 in Fig. 10.

P. 234. 1 parabola simplic (Ia, 101) ★ 2 parabola ★ 5 eum ★ 12 parabola ★ 26 in 4.

P. 235. 6 parabola (aussi 14, 15) ★ 11 in 4. ★ 16 quotat|quot ★ 18 g. sit in 11. Fig. ★ 21 [in (Ia, 102)

P. 236. 5 parabola ★ 7 quartat|4. ★ 9 est 4. ★ 22 recta data ★ 33 eum

P. 237. 7 12. ★ 9 basis (aussi 17) ★ 12/13 [secunda (Ia, 103)

P. 238. 6 (Ia, 104) ★ *Les figures de l'Appendix sont à la fin du volume.* ★ 10 PRIMA ★ 15 [1, 52. ★ recta|recta

P. 239. 1 40 ★ 12 MF|AF ★ 15 M|ut ★ 31 [67 (Ia, 105) ★ eum

P. 240. 7 eum (aussi 15, 19) ★ 29 *En marge* : Figura 2.

P. 241. 3 YX|IX

P. 242. 19 eum ★ 26 [sit (Ia, 106)

P. 243. 6 tertia|3. ★ *En marge* : Figura 3.

P. 244. 10 eum ★ 23 quarta|4. ★ *En marge* : Figura 4.

P. 245. 9 III|tertia ★ 20 eum

P. 246. 1 [ergo (Ia, 107) ★ 14 quinta|5. ★ *En marge* : Figura 5. ★ 22 basis

P. 247. 3 *En marge* : Figura 6. *Dans l'édition de 1664, la figure est numérotée 5, comme la précédente.* ★ 8 constructor parabola ★ 9/10 parabolam (aussi 10, 11) ★ 13 eum

P. 248. 3 biseca ★ 12 VI|sexta

P. 249. 10 [tangens (Ia, 108) ★ *Les lettres grecques qui suivent dans les figures en le texte sont en majuscule.*

P. 250. 1 eum ★ 4 axi 98 ★ 15 eum

P. 251. 3/4 semibasis ★ 16 VI|sexta

P. 252. 10 eum (aussi 24) ★ 16 em|structione (Ia, 109) ★ 17 et 18. *Par exception 27 est en minuscule.* ★ 20 parabola ★ 21 parabola

P. 253. 1 parabola (aussi 2, 4, 5) ★ 2 basis ★ 3 parabola (aussi 4, 6) ★ 11 [secunda ★ 4 eum (aussi 10)

P. 254. *Lettres grecques en minuscule* : 1 0, 2 0π9, 3 0δ, 9 9π0, 12 δλ. ★ 6 basis ★ parabola (aussi 13, 14) ★ 7 eum ★ 11 basim|basem ★ 14 parabola

Les figures à la fin du volume (première planche) ne sont pas numérotées, mais indiquées comme suit : Fig. Pag. 91. pour notre Fig. 122 (3) ; ★ Fig. Pag. 104. pour 134 (1) ; ★ Fig. Pag. 105. pour 135 (2) ; ★ Fig. Pag. 106. pour 136 (3) ; ★ Fig. Pag. 106. pour 137 (4) ; ★ Fig. Pag. 107. pour 138 (5) ; ★ Fig. Pag. 107. pour 139 (5) ; ★ Fig. Pag. 108. pour 140 (5) et 141 (5). *Sur cette dernière, la lettre ζ est minuscule, pour 7 on lit 6, et le chiffre 12 n'est pas marqué.*

MÉTHODES DE QUADRATURE.

(Leçons des *Varia*, pages 44 à 57.)

- P. 255. 11 dantaxat ★ 14 parabolam
- P. 256. 7 asymptoton ★ 11 solum (*Var.* 45) ★ 12 3. et 4. ★ 17 hyperbola
★ Fig. 142. *Les lignes ponctuées ne sont pas tracées et le point B n'est pas coté.*
- P. 257. 8 Archimedæam ★ 9 GHE|GHE ★ 10 *Après acquetur., à la ligne GE, in GH, puis item commence un nouvel aligné.* ★ 13 Archimedæa ★ 16 eum ★ 17 AH ad AO|AH, AO ★ 23 eum ★ parallelogramm ★ parallelogrammum
- P. 258. 14|ergo (*Var.* 46) ★ 22 parallelogrammos ★ 23 Archimedæa ★ 24 curva in IND
- P. 259. 4 Archimedæa ★ 6 hyperbolæ (*aussi* 10) ★ 22 *Entre GE et ad est intercalé : ad parallelogrammum sub GE, in GH, ita parallelogrammum sub GE, in GE* ★ GA|GH
- P. 260. 2 hyperbola (*aussi* 6, 11) ★ 8 eum ★ 13 eum ★ 19 parabola ★ 22|Sit *Var.* 47) ★ AGRC|AGRE ★ 26 GE|EC
- P. 261. 4 eum ★ Fig. 143. *Les lettres V, Y ne sont pas inscrites.* ★ 20 EN|EV
- P. 262. 6 YC|BC ★ 27 ARCB|AROB
- P. 263. 2 quod|quæ ★ 2/3 representates ★ 3 ad|o (*Var.* 48) ★ 5 Archimedæo
★ 13 AHC|AHCB ★ Fig. 144. *Les lignes AD, DC ne sont pas tracées.*
- P. 264. 3 eum (*aussi* 9, 21) ★ 4 GE|EC
- P. 265. 14 parallelogrammum|ut ajouté devant. ★ 20|nempe (*Var.* 49) ★ 22 parallelogrammum ★ 27 3;|B. ★ 28 2;|3.
- P. 266. 4 hyperbola ★ 11 potestatis|quantitatis
- P. 267. 5 q.|quad. (*trois fois; même abréviation par la suite*) ★ 10 U|V (*de même ensuite*) ★ 11 eum ★ 14 — Aq.|A — quad. ★ 18 — om. ★ 28 Aq.|AG
- P. 268. 23 E. quad. ★ 6 e.|cub. (*même abréviation par la suite*) ★ 10 æquale ★ 16 quad.
- P. 269. 1|loco (*Var.* 50) ★ 3 quad. ★ 14 ee.|cub. cub. (*deux fois; même abréviation par la suite*) ★ qc.|QC ★ qq.|quad. quadr. (*aussi* 19; mais QQ 21, qu. qu. 22, 23, qu. qua. 25) ★ æqualis|æ ★ 19 qc.|QV. cub. (*mais* quad. cub. 25)
- P. 270. 5 qc.|QC *la 1^{re} fois*; qu. cub *la seconde et par la suite* ★ qq.|qu. qu. (*aussi* 7, *mais* qua. qua. 10) ★ 8 hyperbolæ ★ 10 q.|*L'abréviation ordinaire est désormais qu.; toutefois qua. la 1^{re} fois, 25*) ★ 14 parabola ★ 20 correlatis ★ 23 —|+
★ 27 sive $\frac{B \text{ qu. cu.}}{AQ}$; æquale
- P. 271. 1 (*Var.* 51) ★ 2 æquale ★ 3 ex|de ★ 5 B. cub. æquari $\frac{B \text{ qu. in } Y}{A \text{ cub.}}$
★ 7 B qu. qu. ★ Fig. 145. *La courbe HOPN n'est pas tracée et la lettre O n'est pas inscrite*

P. 272. 7 potestatibus]præstantibus ★ 9 ignotarum]ignoratum ★ 15 EC]FG ★ 22 statum ★ 25 applicato ★ 28 B, quad. — A qu. æquale E, quad. ★ 30 eum ★ 32 ad basim HN, sive ad D applicatis *est intercalé* 31 *après* applicata

P. 273. 1 ad B applicata *est rejeté après* æqualia ★ dato]curvo ★ 3]erunt (*Ja*, 53) ★ 9 eum (*aussi* 17, 23) ★ U]V (*de même ensuite*) ★ 17 autem]ergo ★ q:] *abréviations* : qu. *ici et* 23, *la seconde fois, pour Bq.*, 18, 21 *et* 23 *pour Eq.* : quad. *ailleurs et par la suite jusqu'à indication contraire.* ★ 21 qq.]quad. quad. (*mais qu. qu. 23*)

P. 274. 3 omnium ★ 7 æquatur]æqualis ★ 11 exsequamur]sequamur ★ 12 B, quad. cub. ★ E, cub. cub. cub. ★ 14 eum ★ B, qu. ★ 15 B, quadratum ★ 21]sit (*Ja*, 53) ★ 23 basim]MV *ajouté.*

P. 275. 3 eum ★ 5 MV]MN

P. 276. 3 qe.]quad. cub. ★ æquale E, cubo ★ 6 q.] *désormais l'abréviation est qu., sauf indications contraires.* ★ 7 valore ★ 10 æquale ★ 12 curva AKOGDCH ★ 13 authorem ★ 15 ex]de

P. 277. 1 quarta]i. ★ 3 B, quad. ★ E, quad. ★ 5 E qu. quad. ★ V quad. ★ 10 quadratura ★ priori ★ 20 ex]de ★ 24 B qui]in E, qu. — E qu. qu. (*Ja*, 54) ★ 30 E, quad. quad.

P. 278. 1 abs ★ 12 B, qu. cub. in V, quad. ★ 19 inter]in ★ 25 hyperbole

P. 279. 2 quad. cubi ★ 3 proxim ★ 4 tam quam ★ præcedentes ★ 6 curvæ]enrae ★ 9 A, quad. ★ B, qua. ★ 14 O quad. (*aussi* 20) ★ 17 B, qu. qu. ★ A, Qu. ★ 26 B, q. qu. ★ V, quad. ★ 27 B, quad. ★ 28 Uq.]A, quad.

P. 280. 4 idque]id quæ ★ 6]Hæc (*Ja*, 55) ★ 9 ADB]A, B, C. ★ 11 ipsi in]ipsi sic ★ 24 B, quad.

P. 281. 7 eum (*aussi* 23) ★ 22 E cub.]cubo (*Ja*, 56)

P. 282. 4 *et* 6 V, quad. ★ 6 E, q. ★ 7 omnes E quadrati ★ 10 E, quad. ★ 12 V, quad. ★ 13 eum ★ omnes E, qu. ★ 15 eum ★ 24 synthesim ★ 27 expatiandum

P. 283. 3 eum ★ 4 omnes B in A ★ 5 omnes ★ 6 *et* 13 Oq. ★ 7 æquatio]æqu. ★ 8 E, q. ★ 10 omnes O quadrati ★ 13 V, quadr. ★ 14 tertia]quarta ★ 18 V, quadrato

P. 284. 2 *et* 9 quad. ★ 3 *et omis.* ★ 5 quarta]quinta ★ omnes V quadr. ★ 6 illo ★ 10 quinta]sexta ★ Y]I ★ 16 æqua]le (*Ja*, 57) ★ 17 sexta]septima ★ 20 I, quadratum ★ 21 septima]octava

P. 285. 4 Aq. ★ Bq. in Oq. ★ 5 A: qu. ★ octava]nona ★ 7 eum ★ 11 V quad. ★ 12 nonam]decimam ★ 18 novem]decem

FRAGMENT SUR LA CISSOÏDE.

[Leçons de M. Ch. Henry (*Pierre de Carcay*, pages 38-40).]

P. 285. 21 yssois ★ 22 perpendicularus ★ 23 yssoïdis ★ 24 yssoïde ★ asympto

P. 286. 7 yssoïdi ★ 10 M et D]MBD ★ 15 yssoïdale ★ 17 KI]KL

P. 287. 1 yssoidem ★ applicatis ★ ex]de ★ 2 yssoidis ★ 4 III]LI ★ 7/8 ad summam rectarum III, IV, ita recta NO *repete.* ★ 8, 10, 12, 23, 26, 28 VO]NO ★ 13 yssoidis ★ 19 recte ★ 22 eum ★ 116]110 ★ 23 eandem

P. 288. 1, 4, 8 NO]VO ★ 5 omia ★ 11 yssoidale

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

(Legons de l'édition de Samuel Fermat; 1670 = *S.*)

On a reproduit en caractères plus petits les textes de Bachet (traduction ou commentaires), auxquels se rapportent les observations de Fermat. Les legons de Bachet sont données d'après l'édition de Diophante par Bachet, 1654 = *Ba.*

Le numérotage des observations de Fermat et les renvois entre parenthèses sont ajoutés.

Dans le Diophante de Samuel Fermat, les notes de son père sont imprimées en italique, et précédées chacune de la mention : OBSERVATIO D. P. F. (DOMINI PETRI DE FERMAT pour D). — Les indications de pagination (*S.* avec le n°) ne se rapportent qu'au texte de Fermat.

P. 291. 4 quibuscunque ★ eum ★ 17 duos]duos ★ 22 duos *Ba, om S*

P. 292. 2 lib. 4. ★ 8 *et* 17 quatuor]4 ★ 10 36]3 ★ 16 34^{um}]tertiū ★ 23 Extat ★ V]quinto ★ 24 5]quinta

P. 293. 1 tres]3. ★ 2 eorundem ★ 7 Primus]1. ★ Secundus]2. ★ Tertius]3. ★ 8 Diophantean ★ 11 quatuor]4 ★ 13 5^{um}]5 ★ lib. 5. ★ 19 (*S.* 119) ★ 22 VI]sexti

P. 294. 2 ter]3. ★ quater]4 ★ 7]etiam (*S.* 128) ★ 13 v. g.

P. 295. 1 loco]loci ★ v. g. ★ 12 quocunque

P. 296. 5 datus]ductus ★ 7 *et omis.* ★ 18 tres]3. ★ 18/19 qui nempe unitate *superant* quaternarium *entre parenthèses.* ★ 19 v. g. ★ 25/26 nempe quaternarium unitate *superantes entre parenthèses.* ★ 27 productus.

P. 297. 1 tres]3. ★ 11 v. g. ★ 19 prescribitur

P. 298. 7 eum ★ 17]differentiam (*S.* 134)

P. 299. 10 iterationem]operationem

P. 300. 6 sequentis ★ 13 duo quadratoquadrata ★ 16 quadratoquadrata

P. 301. 3 operationem]aequationem ★ 10 multiplus ★ 22 V. G.

P. 302. 2 eundem ★ 4 quatuor]4. ★ 12 superiori ★ 23 v. g.

P. 303. 4 $\frac{7225}{5184}$] $\frac{7245}{5184}$ ★ 6 vigesima]secunda ★ 8 eum ★ 13 v. g. ★ 17]conditione (*S.* 162) ★ 23 VI]6.

P. 305. 14]esse (*S.* 181) ★ 16 polygonis

P. 306. 5 utcunque ★ 5/6 v. g. ★ 8 tertia]3. ★ 13 eum

P. 307. 1 *et* 2 v. g. ★ 13/14 conficiant]constituant (*à corriger*) ★ 16 *et* 19 eum

P. 308. 3 *et* 7 eum ★ 17 6|N - 3 (S. 210) ★ 20 eum ★ 28 quatuor|4 ★ productum (*corrigez*)

P. 309. 1 24. ★ 2 lib. 6. ★ 4 lib. 31. ★ eum ★ 14 quatuor|4.

P. 310. 1 v. g. ★ 18 hypothe. ★ 20 perpendic. ★ 21 eundem ★ quatuor|4

P. 311. 2 Diophanteos

P. 312. 9 31. quaestione lib. 4.

P. 313. 7 possunt S ★ 13 eum ★ 24 Veruntamen

P. 314. 1 *et* 24 eum ★ 8 quam|quā ★ 13 eundem ★ 13 authore ★ 30 quadrupla|quadrati ★ unitate|1.

P. 315. 3|Deinde (S. 233) ★ 13 quarto|4.

P. 316. 29 Diophantaram

P. 317. 2 v. g. ★ 12 duntaxat ★ 17 eum ★ 23 Diophanteis

P. 318. 1 IV|4. ★ 2 facilius ★ 19 eundem

P. 319. 3 (6 *Fatic.*) est la leçon indiquée dans le commentaire de *Ba* ★ 4 *Les mots entre parenthèses sont tirés de la marge de S et déduits du commentaire de Ba* ★ 15 productum

P. 320. 14|primum (S. 250) ★ 22 v. g.

P. 321. 4 quadrupla ★ 24 $\frac{64}{298}$ S

P. 322. 4 $\pi\pi\omega\pi$ *Ba* ★ 27 $\pi\pi\pi\pi\pi\pi\pi\pi$ *Ba* ★ 35 productum

P. 323. 3 vere|verò

P. 324. 1 (S. 252) ★ 9 eum ★ 13 A. quadratum (*première fois*) ★ 16 D.C. = B bis C.
19. 23 *et* 23 minus|- ★ 29 minus *omiss.*

P. 325. 1 + 2 C|- 2 C ★ 6 1 N plus|A ★ excessus

P. 326. 12 9|25 (*aussi* 14. 15) ★ 13 -|- ★ 14 *et* 15 6|10 ★ 18 propositis
★ 23 eum

P. 327. 2/3 vigesimam quartam libri sexti. ★ 18 quadratoquadrata

P. 328. 3 Diophanteae ★ 16 *et* 22 eum

P. 329. 3 v. g.

P. 330. 4 quæsitus triangulus S. *hæc* quæsitum triangulum ★ 14 (S. 291) ★ quatuor|4.

P. 331. 3 triang. rectang.

P. 332. 7 Diophanteo ★ 10 *et* 14 eorundem ★ 17 eum

P. 334. 4 supetunt ★ 20 $\pi\pi\pi\pi\pi\lambda\alpha\pi\beta\pi\pi\pi\pi\pi$

- P. 335. 2 v. g. ★ 13 numerus ★ 14 accedunt ★ 18 lib. 5.
 P. 336. 11 Formatus
 P. 337. 1 a (*première fois*) omis. ★ 6 39]29.
 P. 338. 14 vigesimam quartam ★ 15 sexti ★ 18 exequi
 P. 339. 5 Diophantæam ★ 8 utrinque
 P. 340. 7]laboriosa (S. 339) ★ 11 quadratos]quadrata
 P. 341. 25 multati
 P. 342. 1 et 2 multati

ERRATA ⁽¹⁾.

Page 86, ligne 4 : Supprimer la virgule après RD.

109 « 9 : Mettre point-virgule après *bis*.

154 « 8 : La lettre O devrait être en italique.

167 « 4 de la note 2. — Au lieu de 20 *avril*, lire 26 *avril*.

211 « 5 de la note 2. — La découverte de Neil a été publiée par Wallis dès 1659, dans la seconde Partie du Volume intitulé : *Johannis Wallisii S. S. Th. D., Geometriæ Professoris Saciliani Oxoniæ, Tractatus duo, Prior de Cycloïde et corporibus inde genitis, Posterior epistolaris, in quo agitur de cissoïde et corporibus inde genitis et de curvarum tum linearum εἰς ὅςδε, tum superficierum πλάτυσμεν, Oxoniæ, typis Academicis Lichfeldianis, Ann. Dom. MDCLX*. — Cette seconde partie est d'ailleurs une réponse à une lettre d'Huygens du 9 juin 1659 et, lorsqu'il l'écrivit, Wallis avait déjà pris connaissance de l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes par Schooten.

218 « 17, mettre une virgule après *ducatur*.

316 « 4, mettre une virgule après *αὐτῶν*.

338 « 2 de la note 2 en remontant. Au lieu de *debit*, lire *dedit*.

377 « 10. Au lieu de *Pyrrhonianum*, lire *Pyrrhoniæ*.

388, note 1. Vérification faite, la pièce du Ms. fr. n. a. 3280 est l'original. L'adresse en est : *Clarissimo viro Petro Danieli Huetio Petrus Fermat S. T.*

⁽¹⁾ Consulter les *Variantes* qui précèdent, notamment pour les pages 70 à 76, la découverte des signaux ayant été postérieure à l'impression.

TABLE DE CONCORDANCE

ENTRE L'ÉDITION DES ŒUVRES DE FERMAT DE 1679

ET LA PRÉSENTE ÉDITION.

Pagination de l'édition de 1679.		Renvois à la présente édition (*).
Folios		Pages
1 non numéroté.	TITRE.....	IV
2	CELSISSIMO S. R. L. PRINCIPI FERDINANDO ETC.....	350
3 recto.	De celsissimo principe etc.....	352
3 verso, ligne 1.	De principis ejusdem etc.....	353
3 verso, ligne 13.	De eodem principe etc.....	354
4	(Préface) : ERUDITO LECTORI.....	355
5 recto.	Éloge de Monsieur de Fermat etc.....	359
5 verso, ligne 8.	Observation de Monsieur de Fermat sur Synésius etc.	362
6 recto, ligne 25.	Lettre de Monsieur Descartes à Monsieur de Fermat, p. 347, tom. 3 des Lettres de Monsieur Descartes.	XXXII
6 verso.	P. Herigonius, tom. 6. <i>Cursus Mathematici</i> p. 68. <i>De Maximis et Minimis</i>	171
6 verso, ligne 8.	D. Ismael Bullialdus <i>Exercitatione de Porismatibus</i> .	77
6 verso, ligne 28.	R. P. Mersemmus <i>Ordinis Minimorum, Reflexionum</i> <i>Physico-mathematicarum</i> pag. 215.....	{ Avertissement. p. x, note 4.
6 verso, ligne 34.	Samuel Sorberius in præfatione operum Gassendi..	
		LXII note.
Pages		
1	<i>Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani.</i> Ad locos planos et solidos Isagoge.....	94
9	Appendix ad Isagogem topicam etc.....	103
12	Apollonii Pergæi Libri duo de Locis planis restituti.	3

(*) Les chiffres modernes indiquent les pages du présent Volume; les chiffres romains en grandes capitales les numéros des pièces de la Correspondance qui seront publiées dans les Volumes suivants.

Pagination de l'édition de 1679.		Renvois à la présente édition. — Pages
28	Apollonii Pergaei Propositiones de Locis planis restitutæ. Liber II.	29
44	De aquationum localium transmutatione etc.	255
58	Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum etc.	181
60	Appendix ad superiorem methodum	184
63	Methodus ad disquirendam maximam et minimam.	133
63 1, 3 en rem.	De tangentibus linearum curvarum.	134
65	Centrum gravitatis, parabolici conoidis, ex eadem me- thodo.	136
66	Ad eandem methodum. — Volo etc.	140
69	Ad eandem methodum. — Doctrinam etc.	158
70	De contactibus sphericis.	52
89	De linearum curvarum cum lineis rectis etc.	211
104	Appendix ad dissertationem de linearum etc.	238
111	De solutione problematum etc.	118
116	Porismatum Euclidæorum renovata doctrina etc.	76
121	<i>Lettres de Monsieur de Fermat, avec quelques-unes de celles qui lui ont esté écrites par plusieurs personnes de grand sçavoir sur divers sujets de Mathématiques ou de Physique</i>	X
	Lettre de M. de Fermat au R. Père Mersenne Minime. Du 3 juin 1636.	III
122	Au R. P. Mersenne Minime. Du 24 juin 1636.	IV
123	Au R. P. Mersenne Minime. Du 2 septembre 1636.	X
124	Lettre de Messieurs de Pascal et de Roberval à M. de Fermat. A Paris, le 16 aoust 1636.	VIII
130	Lettre de M. de Fermat à Messieurs de Pascal et de Ro- berval. Du 23 aoust 1636.	IX
133	A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathématiques à Paris.	VII
134	A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathématiques à Paris. Du 16 septembre 1636.	XI
136	A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathématiques à Paris. Du 22 septembre 1636.	XIII
138	Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat. Du 11 octobre 1636.	XIV
141	Objecta à D. de Fermat, adversus propositionem Mecha- nicam D. de Roberval.	XVI
142	Nova in Mechanicis Theoremata D. de Fermat.	V et II

Pagination de l'édition de 1679.		Renvois à la présente édition.
Pages		N°
143	Propositio Geostatica D. de Fermat.....	II
144	Propositio D. de Fermat circa parabolam.....	84
145	Lettre de M. de Fermat au R. Père Mersenne de l'Ordre des Minimes.....	VI
146	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris. Du 4 novembre 1636.....	XV
147	A Monsieur de Roberval. Du 7 décembre 1636.....	XVII
148	A Monsieur de Roberval à Paris. Du 16 décembre 1636.	XVIII
151	A Monsieur de Roberval.....	XIX
152	Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat. Du 4 avril 1637.....	XX
153	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris. Du 20 avril 1637.....	XXI
154	Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat. Du 1 ^{er} juin 1638.....	XXIX
156	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de ****.....	CXVI
158	Démonstration dont il est parlé dans la lettre précédente.	CXVII
161	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.....	XLII
162	A Monsieur de ****. Du 18 octobre 1640.....	XLIV
165	Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat. Du 4 août 1640.....	XLI
166	Lettre de Monsieur de Frenicle à Monsieur de Fermat. Du 2 août 1641.....	XLIX
169	Lettre de M. de Frenicle à M. de Fermat. Du 6 sep- tembre 1641.....	L
173	Lettre de M. de Fermat au Révérend Père Mersenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.....	XXXVIII
176	Lettre de Monsieur de Fermat au Révérend Père Mer- senne de l'Ordre des Minimes. A Paris.....	XLI
178, 1. 3	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carevi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.....	LIII
178, 1. 4 en rem.	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carevi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.....	LXI
179	Lettre de Monsieur Pascal à Monsieur de Fermat. Le 29 juillet 1654.....	LXX
183	Table dont il est fait mention dans la Lettre précédente.	LXX4
184	Lettre de Monsieur Pascal à Monsieur de Fermat. Du 24 août 1654.....	LXXII

Foliation de l'édition de 1670.		Renvois à la présente édition.
		X
188	Lettre de Monsieur Pascal à Monsieur de Fermat. Du 27 octobre 1654.....	LXXV
188	Problemata proposita à D. de Fermat.....	LXXIX
189	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelm Digby. Du 20 avril 1657.....	LXXXII
190	Problema propositum à D. de Fermat.....	LXXXI
191	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelm Digby. Du 20 juin 1657.....	LXXXIII
191	Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelm Digby. Du 15 août 1657.....	LXXXIV
193	Remarques de M. de Fermat sur l'Arithmétique des In- finis de Monsieur Wallis Professeur de Géométrie en Angleterre dans l'Université d'Oxford.....	LXXXV
196	Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat. Du 5 décembre 1657.....	LXXXVII
197	Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat. Du 12 décembre 1657.....	LXXXVIII
197	Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat. Du 13 février 1658.....	LXXXIX
198	Lettera del Signor Digby al Signor di Fermat. Di 15 maggio 1658.....	XCI
200	Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat. De Bienassis le 10 août 1660.....	CVIII
201	Viro Clarissimo Dom. Gassendo Petrus de Fermat. S. P. De proportionibus quæ gravia decidentia accelerantur....	LXII
204	Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de ****.....	LXII _a
205	Lettera del Signor Benedetto Castelli Abbate di Verona, al Signor di ****.....	V _a
205	Viro Clarissimo Dom. de Ranchin, sen. Thol. Petrus de Fermat S. P.....	366
208	Viro Clarissimo D. de Pellisson, Libellorum supplicum magistro. Samuel de Fermat, S. P.....	373
après 210, 2 Fol. non numérotés	Cede Deo sen Christus moriens. D. Petri de Fermat Car- men amor-bacum ad. D. Balzacum.....	390
	Cinq planches de figures géométriques.	

FIN DU TOME PREMIER.

Salway, George William
professeur à Queen's college
24 March, 1891.

ŒUVRES DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

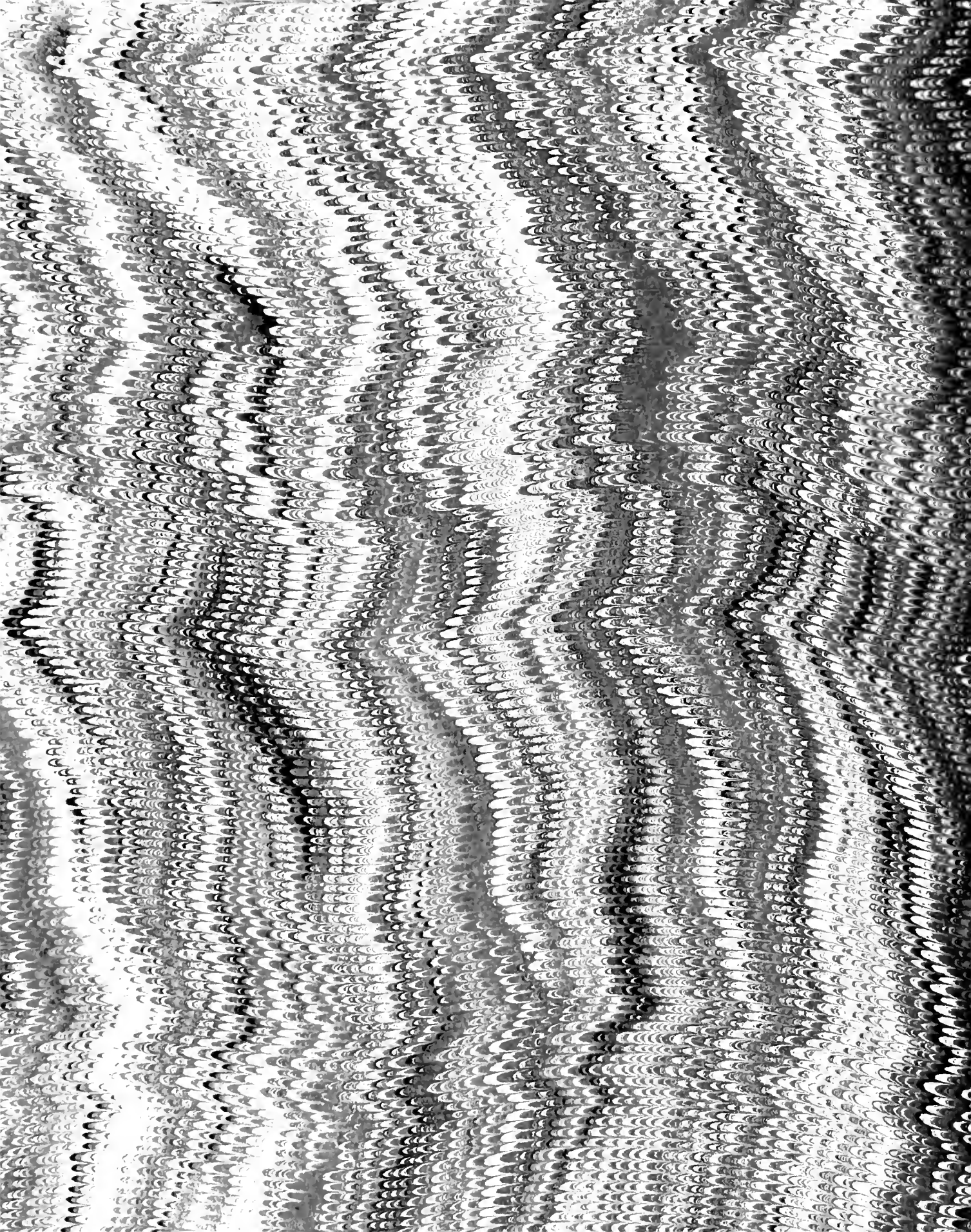
ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. — OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

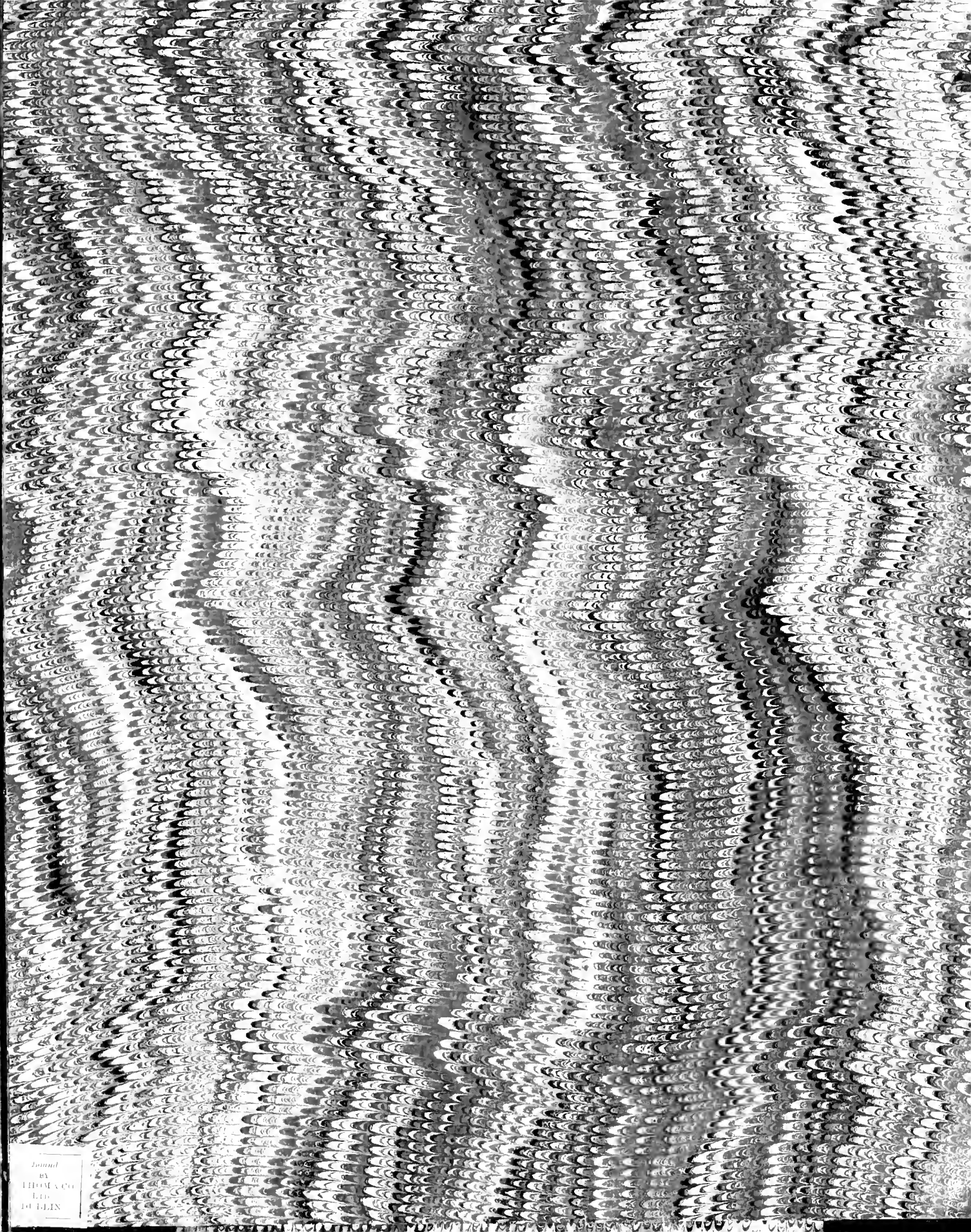


PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCI





Bound
by
THOMAS CO
LTD
LONDON

